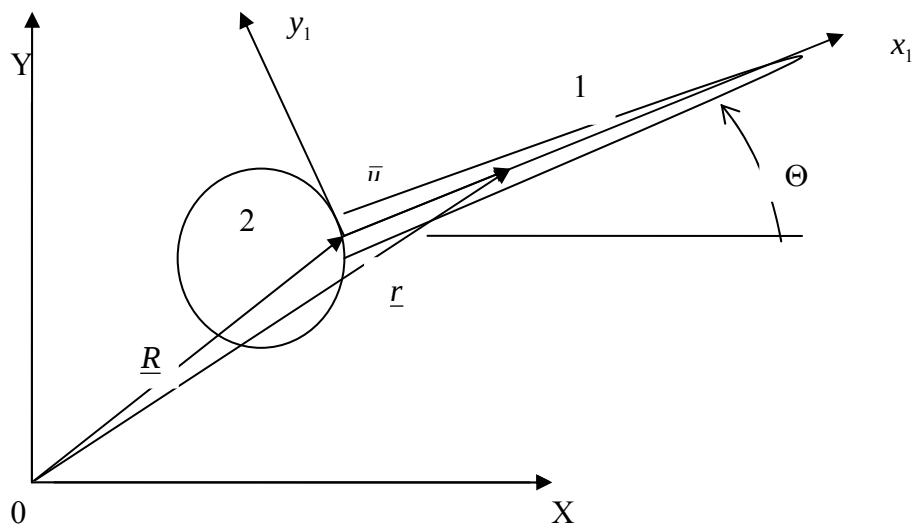


**Lopez Dániel**

# RUGALMAS REPÜLŐGÉPSZÁRNY MODELLJÉNEK FELÁLLÍTÁSA

## 1. FELTÉTELEZETT ELMOZDULÁSMEZŐ

A vizsgálat során a repülőgép az XY síkban mozog (1.1 ábra) sebessége  $v$  pedig nem változik.



1.1 ábra  
A koordinátarendszerek elhelyezkedése

XY: globális koordinátarendszer

x1y1 : a jobboldali szárnyhoz kötött koordináta-rendszer

A jobboldali szárny egy tetszőleges pontjának a helyvektora a globális koordináta-rendszerben:

$$\underline{r} = \underline{R} + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\bar{u}} \quad (1)$$

ahol  $\underline{R}$  az XY origójából a lokális koordináta-rendszer origójába mutató helyvektor.

$\underline{\underline{A}}$  a lokális koordináta-rendszer orientációját meghatározó forgásmátrix:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix}$$

A jobboldali szárny egy tetszőleges pontjának a helyvektora a lokális koordináta-rendszerben:

$$\underline{\bar{u}} = \underline{\bar{u}}_0 + \underline{\bar{u}}_f \quad (2)$$

ahol  $\underline{\bar{u}}_0$  a kiválasztott pont deformálatlan állapotbeli helyét

$\underline{\bar{u}}_f$  pedig a rugalmas alakváltozásból származó elmozdulást jelöli

Megj.: a felülhúzás a lokális koordináta-rendszerben értendő.

A rugalmas elmozdulások a következőképpen írhatóak fel:

$$\underline{\bar{u}}_f = [\underline{\bar{u}}_{f1} \quad \underline{\bar{u}}_{f2}]^T$$

$$\underline{\bar{u}}_{f1} \approx \sum_{k=1}^m a_k \cdot f_k \quad (3.1)$$

$$\underline{\bar{u}}_{f2} \approx \sum_{k=1}^n b_k \cdot g_k \quad (3.2)$$

ahol  $\underline{\bar{u}}_{f1}$  ill.  $\underline{\bar{u}}_{f2}$  közelítése az ún. Bázisfüggvényekkel történik.

(  $f_k = f_k(x, y)$ ,  $g_k = g_k(x, y)$  )

$$a_k = a_k(t) \quad b_k = b_k(t) \quad (3.3)$$

Mátrixos formában:

$$\underline{\bar{u}}_f = \underline{\bar{S}} \cdot \underline{q}_f \quad (4)$$

ahol  $\underline{\bar{u}}_f$  a deformáció vektora

$\underline{\bar{S}}$  az ún. forma matrix a bázisfüggvényekkel

$\underline{q}_f$  a rugalmas koordináták vektora, amely együtthatókat tartalmazza.

A merevtestszerű mozgáshoz tartozó általánosított koordináták:

$$\underline{q}_r = \begin{bmatrix} \underline{R}^T & \Theta \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

Ezt a vektort ebben a vizsgálatban  $\underline{q}_f$ -el kell kiegészíteni.

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \underline{R}^T & \Theta & \underline{q}_f^T \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

## 2. SEBESSÉG ILL. GYORSULÁS

Egy tetszőleges pont sebessége a következő alakban írható a globális rendszerben:

$$\dot{\underline{r}} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{A}_{\ominus} \cdot \underline{\bar{u}} & \underline{A} \cdot \underline{\bar{S}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\underline{R}} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\underline{q}}_f \end{bmatrix} = \underline{L} \cdot \dot{\underline{q}} \quad (7)$$

ahol

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{A}_{\ominus} \cdot \underline{\bar{u}} & \underline{A} \cdot \underline{\bar{S}} \end{bmatrix} \quad \underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Egy tetszőleges pont gyorsulása a következő alakban írható a globális rendszerben:

$$\ddot{\underline{r}} = \dot{\underline{L}} \cdot \dot{\underline{q}} + \underline{L} \cdot \ddot{\underline{q}} \quad (8)$$

$$\dot{\underline{L}} = \begin{bmatrix} 0 & -\underline{A} \cdot \underline{\bar{u}} \cdot \dot{\Theta} + \underline{A}_{\ominus} \cdot \underline{\bar{S}} \cdot \dot{\underline{q}}_f & \underline{A}_{\ominus} \cdot \underline{\bar{S}} \cdot \dot{\Theta} \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 3. A MOZGÁSI ENERGIA

A jobboldali szárny kinetikus energiája:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \int_V \rho \cdot \underline{\dot{r}}^T \cdot \underline{\dot{r}} \cdot dV \quad (10)$$

(7) összefüggést felhasználva:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \int_V \rho \cdot \underline{\dot{q}}^T \cdot \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\dot{q}} \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \underline{\dot{q}}^T \cdot \int_V \rho \cdot \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{L}} \cdot dV \cdot \underline{\dot{q}} = \frac{1}{2} \cdot \underline{\dot{q}}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\dot{q}} \quad (11)$$

Mivel  $\underline{\dot{q}}$  csak az időtől függ.

ahol

$$\underline{\underline{M}} = \int_V \rho \cdot \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{L}} \cdot dV \text{ az ún. tömegmátrix}$$

A. tömegmátrix vizsgálata:

$$\underline{\underline{M}} = \int_V \rho \cdot \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{\bar{u}}}^T \cdot \underline{\underline{A}}_{\ominus}^T \\ \underline{\underline{\bar{S}}}^T \cdot \underline{\underline{A}}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{A}}_{\ominus} \cdot \underline{\underline{\bar{u}}} & \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\bar{S}}} \end{bmatrix} \cdot dV \quad (12)$$

$$\underline{\underline{M}} = \int_V \rho \cdot \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{A}}_{\ominus} \cdot \underline{\underline{\bar{u}}} & \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\bar{S}}} \\ \underline{\underline{\bar{u}}}^T \cdot \underline{\underline{A}}_{\ominus}^T & \underline{\underline{\bar{u}}}^T \cdot \underline{\underline{A}}_{\ominus}^T \cdot \underline{\underline{A}}_{\ominus} \cdot \underline{\underline{\bar{u}}} & \underline{\underline{\bar{u}}}^T \cdot \underline{\underline{A}}_{\ominus}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\bar{S}}} \\ \underline{\underline{\bar{S}}}^T \cdot \underline{\underline{A}}^T & \underline{\underline{\bar{S}}}^T \cdot \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{A}}_{\ominus} \cdot \underline{\underline{\bar{u}}} & \underline{\underline{\bar{S}}}^T \cdot \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\bar{S}}} \end{bmatrix} dV \quad (13)$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_{RR} & m_{R\Theta} & m_{Rf} \\ m_{R\Theta}^T & m_{\Theta\Theta} & m_{\Theta f} \\ m_{Rf}^T & m_{\Theta f}^T & m_{ff} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Az almátrixok vizsgálata:

$$\underline{\underline{m}}_{RR} = \int_V \rho \cdot \underline{\underline{I}} \cdot dV = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (15)$$

ahol  $m$  a vizsgált szárny tömege

$$\underline{\underline{m}}_{R\Theta} = \underline{\underline{A}}_{\Theta} \cdot \int_V \rho \cdot \underline{\underline{u}} \cdot dV = \underline{\underline{A}}_{\Theta} \cdot \int_V \rho \cdot (\underline{\underline{u}}_0 + \underline{\underline{u}}_f) \cdot dV = \underline{\underline{A}}_{\Theta} \cdot [\underline{\underline{I}}_1 + \hat{\underline{\underline{S}}} \cdot \underline{\underline{q}}_f] \quad (16)$$

ahol

$$\underline{\underline{I}}_1 = \int_V \rho \cdot \underline{\underline{u}}_0 \cdot dV \quad \text{a statikai nyomaték a lokális koordináta-rendszer tengelyeire,}$$

ezért ha ezek a tengelyek egybeesnek a félszárny tömegközéppontjával akkor:

$$\underline{\underline{I}}_1 = \underline{\underline{0}}$$

$$\hat{\underline{\underline{S}}} = \int_V \rho \cdot \underline{\underline{S}} \cdot dV$$

$\hat{\underline{\underline{S}}} \cdot \underline{\underline{q}}_f$  vector jelenti a statikai nyomaték változását ami a deformációból adódik.

$$\underline{\underline{m}}_{Rf} = \underline{\underline{A}} \cdot \int_V \rho \cdot \underline{\underline{S}} \cdot dV = \underline{\underline{A}} \cdot \hat{\underline{\underline{S}}} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{m}}_{\Theta\Theta} &= \int_V \rho \cdot \underline{\underline{u}}^T \cdot \underline{\underline{u}} \cdot dV = \int_V \rho \cdot (\underline{\underline{u}}_0^T \cdot \underline{\underline{u}}_0 + 2 \cdot \underline{\underline{u}}_0^T \cdot \underline{\underline{u}}_f + \underline{\underline{u}}_f^T \cdot \underline{\underline{u}}_f) \cdot dV \\ \underline{\underline{m}}_{\Theta\Theta} &= (\underline{\underline{m}}_{\Theta\Theta})_{RR} + (\underline{\underline{m}}_{\Theta\Theta})_{Rf} + (\underline{\underline{m}}_{\Theta\Theta})_{ff} \end{aligned} \quad (18)$$

$\underline{\underline{m}}_{\Theta\Theta}$  három skalár összegeként adódik.

$(\underline{\underline{m}}_{\Theta\Theta})_{RR}$  a félszárny másodrendű statikai nyomatéka deformálatlan állapotban a lokális koordináta-rendszer origójára.  $(\underline{\underline{m}}_{\Theta\Theta})_{Rf}$  ill.  $(\underline{\underline{m}}_{\Theta\Theta})_{ff}$  pedig e nyomaték a rugalmas alakváltozás miatt bekövetkező változását írják le.

$$(\underline{\underline{m}}_{\Theta\Theta})_{Rf} = 2 \cdot \int_V \rho \cdot \underline{\underline{u}}_0^T \cdot \underline{\underline{S}} \cdot dV \cdot \underline{\underline{q}}_f \quad (18.1)$$

$$\left(\underline{\underline{m}}_{\Theta\Theta}\right)_{ff} = \underline{q}_f^T \cdot \int_V \rho \cdot \underline{\bar{S}}^T \cdot \underline{\bar{S}} \cdot dV \cdot \underline{q}_f = \underline{q}_f^T \cdot \underline{\underline{m}}_{ff} \cdot \underline{q}_f \quad (18.2)$$

$$\underline{\underline{m}}_{\Theta f} = \int_V \rho \cdot \underline{\bar{u}}^T \cdot \underline{\underline{A}}_{\Theta}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\bar{S}} \cdot dV = \int_V \rho \cdot \underline{\bar{u}}_0^T \cdot \underline{\tilde{I}} \cdot \underline{\bar{S}} \cdot dV + \underline{q}_f^T \cdot \int_V \rho \cdot \underline{\bar{S}}^T \cdot \underline{\tilde{I}} \cdot \underline{\bar{S}} \cdot dV \quad (19)$$

$$\underline{\tilde{I}} = \underline{\underline{A}}_{\Theta}^T \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 4. A RUGALMAS ALAKVÁLTOZÁSBÓL SZÁRMAZÓ ENERGIA

A szárny hajlik ill az x tengely mentén nyúlik. A csavarodástól most eltekintünk az egyszerűség kedvéért.

Ebben az esetben tehát a rugalmas energia a hajlításból ill a nyúlásból adódik, azaz:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_l \left[ I \cdot E \cdot (\underline{\bar{u}}_{f2}'')^2 + E \cdot A \cdot (\underline{\bar{u}}_{f1}')^2 \right] \cdot dx \quad (20)$$

ahol  $E$  a rugalmassági modulus

$I$  a keresztmetszet másodrendű nyomatéka az X tengelyre

$\underline{\underline{K}}_{ff}$  az ún. merevségi matrix, amely nem függ az időtől..  $\underline{\underline{K}}_{ff}$  szimmetrikus.

$U$  felírása  $\underline{q}$  segítségével:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \underline{q}^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{q} = \frac{1}{2} \cdot \underline{q}_f^T \cdot \underline{\underline{K}}_{ff} \cdot \underline{q}_f \quad (21)$$

ahol

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}}^T & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}}^T \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{ff} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 5. ÁLTALÁNOSÍTOTT KÜLSŐ ERŐK

A külső erők virtuális munkája a következő általános alakban írható fel

$$\delta W_e = \underline{Q}_e^T \cdot \delta \underline{q} \quad (22)$$

$$\underline{Q}_e^T = \begin{bmatrix} \underline{Q}_{eR}^T & \underline{Q}_{e\Theta}^T & \underline{Q}_{ef}^T \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\delta \underline{q} = \begin{bmatrix} \delta \underline{R} \\ \delta \Theta \\ \delta \underline{q}_f \end{bmatrix} \quad (24)$$

$\underline{Q}_e$  a szárnyra ható általánosított külső erő.

A félszárnnyra a súlyerő és a felhajtóerő hat, mint külső erő. Mindkettőt koncentrált erőként lehet figyelembe venni.

A súlypont helyvektora a globális rendszerben:

$$\underline{r}_s = \underline{R} + \underline{A} \cdot \underline{\bar{u}}_s \quad (25)$$

A súlypont virtuális elmozdulása:

$$\delta \underline{r}_s = \delta \underline{R} + \frac{\partial}{\partial \Theta} (\underline{A} \cdot \underline{\bar{u}}_s) \cdot \delta \Theta + \underline{A} \cdot \underline{\bar{S}}_s \cdot \delta \underline{q}_f \quad (26)$$

ahol

$$\underline{\bar{u}}_s = \underline{\bar{u}}_{0s} + \underline{\bar{S}}_s \cdot \underline{q}_f \quad (27)$$

$\underline{\bar{u}}_{0s}$  a súlypontba mutató helyvektor deformálatlan állapotban a lokális koordináta-rendszerben  $\underline{\bar{u}}_{fs} = \underline{\bar{S}}_s \cdot \underline{q}_f$  a súlypont deformációjának vektora a lokális koordináta-rendszerben  
 $\underline{\bar{S}}_s$  a súlypontban számított  $\underline{\bar{S}}$

$$\delta \underline{r}_s = \left[ \underline{I} \quad \underline{A}_\Theta \cdot \underline{\bar{u}}_s \quad \underline{A} \cdot \underline{\bar{S}}_s \right] \cdot \delta \underline{q} \quad (28)$$

A súlyerő a globális koordinátarendszerben egyszerűen felírható:

$$\underline{F}_s = [0 \quad -m \cdot g]^T \quad (29)$$

Ennek az erőnek a virtuális munkája tehát:

$$\delta W_s = \underline{F}_s^T \cdot \delta \underline{r}_s = \left[ \underline{F}_s^T \quad \underline{F}_s^T \cdot \underline{A}_\Theta \cdot \underline{\bar{u}}_s \quad \underline{F}_s^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{\bar{S}}_s \right] \cdot \delta \underline{q} \quad (30)$$

vagyis (22) ill. (23) alapján:

$$\underline{Q}_{eR}^T = \underline{F}_s^T \quad (31)$$

$$\underline{Q}_{e\Theta}^T = \underline{F}_s^T \cdot \underline{A}_\Theta \cdot \underline{\bar{u}}_s = m \cdot g \cdot [-\cos \Theta \quad \sin \Theta] \cdot [\underline{\bar{u}}_{0s} + \underline{\bar{S}}_s \cdot \underline{q}_f] \quad (32)$$

$$\underline{Q}_{ef}^T = \underline{F}_s^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{\bar{S}}_s = m \cdot g \cdot [-\sin \Theta \quad -\cos \Theta] \cdot \underline{\bar{S}}_s \quad (33)$$

A légerő figyelembe vétele hasonlóan történik.

## 6. KINEMATIKAI KÉNYSZEREK

Figyelembe kell venni, hogy a szárny (1. test) a törzshöz (2. test) csatlakozik  
A szárny egy tetszőleges pontjából a törzs egy tetszőleges pontjába mutató helyvektor:

$$\underline{r}_{12} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1 \quad (34)$$

A törzs és a szárny kapcsolatát ez az egyenlet fejezi ki, amelyet részletesebben felírva kapjuk:

A törzs és a szárny kapcsolódásánál:

$$\underline{r}_{12} = \underline{0} \quad (35)$$

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a mozgás során e két test nem válik el egymástól.

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \underline{q}_1^T & \underline{q}_2^T \end{bmatrix}^T \quad (36)$$

(35) most két darab algebrai kényszeregyenletet jelöl.

$$\underline{r}_{12} = \underline{C}(\underline{q}) = \underline{0} \quad (37)$$

A kényszerek Jakobi mátrixa:

$$\underline{C}_{=q} = \frac{d\underline{C}}{d\underline{q}} = \underline{C} \cdot \underline{\nabla}_q^T \quad (38)$$

$$\text{ahol} \quad \underline{\nabla}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \underline{q}_1} & \frac{\partial}{\partial \underline{q}_2} \end{bmatrix}$$

## 7. A SZÁRNY MOZGÁSEGYENLETE

Az 1. testre a Lagrange egyenlet:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^1}{\partial \dot{\underline{q}}_1} \right)^T - \frac{\partial T^1}{\partial \underline{q}_1} + \frac{\partial U^1}{\partial \underline{q}_1} + \underline{C}_{=q}^T \cdot \underline{\lambda} = \underline{Q}_e^1 \quad (39)$$

$$\text{ahol} \quad \underline{q}_1 = \begin{bmatrix} \underline{R}_1 & \underline{\Theta}_1 & \underline{q}_{f1} \end{bmatrix}^T$$

$\underline{\lambda}$  a Lagrange féle multiplikátorok vektora.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^1}{\partial \dot{\underline{q}}_1} \right)^T - \frac{\partial T^1}{\partial \underline{q}_1} = \underline{\underline{M}}_1 \cdot \ddot{\underline{q}}_1 + \underline{\underline{\dot{M}}} \cdot \dot{\underline{q}}_1 - \frac{\partial}{\partial \underline{q}_1} \left( \frac{1}{2} \cdot \dot{\underline{q}}_1^T \cdot \underline{\underline{M}}_1 \cdot \dot{\underline{q}}_1 \right) \quad (40)$$

Az 1-es indexet a továbbiakban elhagyva:

$$\underline{\underline{\dot{M}}} \cdot \dot{\underline{q}} - \frac{\partial}{\partial \underline{q}} \left( \frac{1}{2} \cdot \dot{\underline{q}}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \dot{\underline{q}} \right) = -\underline{Q}_v \quad (41)$$

$$\underline{Q}_v = \begin{bmatrix} \underline{Q}_{vR}^T & \underline{Q}_{v\Theta}^T & \underline{Q}_{vf}^T \end{bmatrix}^T \quad (42)$$

A levezetést mellőzve a komponensek a következők:

$$\underline{Q}_{VR} = \dot{\Theta}^2 \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \left[ \underline{\underline{I}}_1 + \underline{\underline{\hat{S}}} \cdot \underline{\underline{q}}_f \right] - 2 \cdot \dot{\Theta} \cdot \underline{\underline{A}}_{\Theta} \cdot \underline{\underline{\hat{S}}} \cdot \underline{\underline{\dot{q}}}_f \quad (43)$$

$$\underline{Q}_{V\Theta} = -2 \cdot \dot{\Theta} \cdot \underline{\underline{\dot{q}}}_f^T \cdot \left[ \int_V \rho \cdot \underline{\underline{\bar{S}}}^T \cdot \underline{\underline{\bar{u}}}_0 \cdot dV + \underline{\underline{m}}_{ff} \cdot \underline{\underline{q}}_f \right] \quad (44)$$

$$\underline{Q}_{vf} = \dot{\Theta}^2 \cdot \left[ \int_V \rho \cdot \underline{\underline{\bar{u}}}_0^T \cdot \underline{\underline{\bar{S}}} \cdot dV + \underline{\underline{m}}_{ff} \cdot \underline{\underline{q}}_f \right] + 2 \cdot \dot{\Theta}^2 \cdot \int_V \rho \cdot \underline{\underline{\bar{S}}}^T \cdot \underline{\underline{\tilde{I}}} \cdot \underline{\underline{\bar{S}}} \cdot dV \cdot \underline{\underline{\dot{q}}}_f \quad (45)$$

A szárny mozgásegyenlete tehát a következő alakot ölti:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{\dot{q}}} + \underline{\underline{C}}_q^T \cdot \underline{\underline{\lambda}} = \underline{\underline{Q}}_e + \underline{\underline{Q}}_V \quad (46)$$

(46) zárt alaku megoldását nehéz megkapni, ezért a fenti kifejezést numerikus módszerek segítségével célszerű megoldani.