Bauer Péter

EGYESÍTETT LQ OPTIMÁLIS ÉS SZUB OPTIMÁLIS MEGOLDÁSOK VÉGTELEN HORIZONTÚ KIMENETKÖVETŐ SZABÁLYOZÁS TERVEZÉSÉRE

BEVEZETÉS

Jelen dolgozat a 2008. április 11-i Repüléstudományi konferencián publikált munka [11] folytatását és továbbfejlesztését mutatja be. Az akkori dolgozat röviden áttekintette a szakirodalomban létező LQ optimális állapot és kimenet követő szabályozási megoldásokat [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] és értékelte azok hiányosságait. A végkövetkeztetés az volt, hogy hiányzik egy pontos és ténylegesen LQ optimális módszer a kimenet követési probléma megoldására, ha a referenciajel jövője nem ismert. A dolgozat célként tűzte ki, egy ilyen módszer megalkotását. Végül levezetésre került egy megoldás, mely csak egy lépéses előretekintést igényel a referencia jelen és matematikailag sima jelek esetén ez is kiküszöbölhető extrapoláció alkalmazásával. A módszer garantálja az aszimptotikus stabilitást és zérus követési hibát konstans referenciajelek esetén, kielégíti a szeparációs elvet konstans és időben változó referencia jelekre egyaránt. Ezenfelül garantálja a véges követési hibát (és így a stabilitást) rámpa (végtelenbe tartó!), tetszőlegesen változó, de korlátos és l_1 vagy l_2 referenciajelekre (lásd [13]). A minimalizálandó funkcionál véges értéke konstans referenciajelre centrálással garantálható, l_1 és l_2 jelekre pedig automatikusan teljesül. Azonban a [11, 12]-beli módszer részletes vizsgálata megmutatta, hogy a konstans referenciajelre való zérus követési hiba garantálása következtében elveszett az LQ optimalitás. Tehát a levezetett módszer nem optimális!

Mivel azonban a szimulációk szerint az elért követő szabályozás minősége kiemelkedő [11, 12, 13] (legalábbis teljes állapot visszacsatolás esetén) ezért érdemes a levezetett módszerre támaszkodva egy ténylegesen optimális módszert kidolgozni, ha ez egyáltalán lehetséges. Ez a témája ennek a munkának. A módszer levezetése során az eredeti rendszerdinamika helyett egy centrált dinamikai egyenlet kerül felhasználásra [9]-ben adott ötlet alapján. Így végül egy többlépéses tervezési módszer adódik, mely LQ optimális konstans és szub-optimális időben változó referencia jelekre. E mellett képes garantálni a zérus követési hibát konstans és a véges követési hibát időben változó (rámpa, korlátos, l_1 vagy l_2) referenciajelekre. A szeparációs elvet a megelőző módszerhez hasonlóan ugyanúgy kielégíti. A cikkben először ismertetésre kerül a vizsgált rendszerosztály, majd a háromlépéses szabályozó tervezési megoldás lépései és levezetése következnek. Végül a levezettet szabályozás tulajdonságainak kimondása és bizonyítása után egy szimulációs példa illusztrálja a módszer alkalmazhatóságát. A cikket az összegzés és a továbblépési lehetőségek ismertetése zárja.

A VIZSGÁLT RENDSZEROSZTÁLY

A vizsgált diszkrétidejű, lineáris, időinvariáns (LTI) rendszerek állapotdinamikai és megfigyelési egyenletei a következők:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B\tilde{u}_k \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \tag{1}$$

- $x_k \in R^n$, $u_k \in R^m$, $y_k \in R^p$: rendre az állapot, bemenet és kimenet vektorok
- $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, $C \in R^{p\times n}$: az állapot, bemenet és kimeneti mátrixok.

Tegyük fel, hogy az (A,B) pár stabilizálható és a (C,A) pár detektálható. y_k a mért kimeneti vektor, mely általában nem egyezik a követendő kimenettel. Jól ismert tény, hogy csak a bemenet dimenziójánál kisebb, vagy azzal azonos dimenziójú kimenet követhető megfelelően. Így szükséges a követendő kimenetet egy másik vektorral és mátrixszal definiálni:

$$y_k^r = C_r x_k \tag{2}$$

Ennek dimenziója legyen $r \le m$ és így $C_r \in R^{r\times n}$. Tegyük fel, hogy a $C_r B$ szorzat teljes sorrangú.

A HÁROMLÉPÉSES EGYESÍTETT MEGOLDÁS LÉPÉSEI

- Stabilizáló állapot visszacsatolás tervezése az (A, B) párra
- Az állandósult állapotú konstans referenciajel követő szabályozás megoldásának számítása a stabilizált rendszerre
- Az eredeti rendszer egyenletek (1) centrálása az állandósult állapotbeli egyenlettel. A kimenet követési probléma LQ optimális (konstans referenciajelre) és szub-optimális (időben változó referenciajelre) megoldása

Stabilizáló állapot visszacsatolás tervezése

Stabilizálható (A, B) pár esetén a statikus állapot visszacsatolás erősítés mátrixa (K_{x_1}) akár pólus allokációval, akár LQ optimális módon megtervezhető. Így a rendszerre vonatkozó egyenletek (1, 2) a következőképpen módosulnak:

$$x_{k+1} = Ax_k - BK_{x_1}x_k + Bu_k \quad x_{k+1} = \Phi x_k + Bu_k \quad y_k^r = C_r x_k \tag{3}$$

Itt Φ már egy stabil rendszermátrix egységkörön belüli pólusokkal.

Az állandósult állapotú konstans referenciajel követő szabályozás megoldása

A megoldás a (3)-beli stabil rendszer állandósult állapotbeli állapot dinamikai és megfigyelési egyenletei alapján vezethető le a következő módon:

$$
\begin{aligned}
&x_\infty = \Phi x_\infty + B u_\infty \quad\quad r_\infty = C_r x_\infty \\
&(I-\Phi)x_\infty = B u_\infty \quad \rightarrow \quad x_\infty = (I-\Phi)^{-1} B u_\infty \\
&\underbrace{C_r (I-\Phi)^{-1} B}_{F} u_\infty = r_\infty \quad \Rightarrow \quad u_\infty = pinv(F) r_\infty
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Itt $(I-\Phi)$ invertálhatósága Φ stabilitása miatt garantált, a pszeudoinverz létezése pedig $C_r B$ teljes sorrangja által garantált. Így a stabilizált rendszerre a konstans referencia jel zérus hibával való követése mindig megoldható (a feltételezett rendszer dimenziók mellett) a fent kiszámított bemenet alkalmazásával. Ez a megoldás azonban a rendszer tranziens viselkedését még nem szabályozza és további kérdés a viselkedése időben változó referencia jelre. Mindkettő problémára megoldást ad a centrált rendszerdinamikára levezetett LQ optimális (szub-optimális) kimenet követő szabályozó. Ennek levezetése található a következő fejezetben, először a véges, majd a végtelen horizontú követést véve figyelembe.

LQ optimális és szub-optimális kimenet követő szabályozások a centrált rendszerre

A centrált rendszerdinamika (3) és (4) ismeretében az alábbi formában áll elő (időben változó referencia jelet feltételezve és szintén centrálva egy konstans értékkel):

$$
\begin{aligned}
&x_{k+1} = \Phi x_k + B u_k \quad \& \quad x_\infty = \Phi x_\infty + B u_\infty \\
&x_{k+1} - x_\infty = \Phi(x_k - x_\infty) + B(u_k - u_\infty) \quad \rightarrow \quad \Delta x_{k+1} = \Phi\, \Delta x_k + B \Delta u_k
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$\Delta r_k = r_k - r_\infty$ felhasználásával, a fenti rendszerre a kimenet követő szabályozás során minimalizálandó véges horizontú funkcionál az alábbi alakú lesz:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{J}(\Delta\bar{\mathrm{y}}, \Delta\mathrm{e}, \Delta\mathrm{u}) = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}-1}\left(\Delta\bar{\mathrm{y}}_\mathrm{k}^\mathrm{T}\mathrm{Q}_1\Delta\bar{\mathrm{y}}_\mathrm{k} + \Delta\mathrm{e}_\mathrm{k}^\mathrm{T}\mathrm{Q}_2\Delta\mathrm{e}_\mathrm{k} + \Delta\mathrm{u}_\mathrm{k}^\mathrm{T}\mathrm{R}\Delta\mathrm{u}_\mathrm{k}\right) + \frac{1}{2}\left(\Delta\bar{\mathrm{y}}_\mathrm{N}^\mathrm{T}\mathrm{Q}_1\Delta\bar{\mathrm{y}}_\mathrm{N} + \Delta\mathrm{e}_\mathrm{N}^\mathrm{T}\mathrm{Q}_2\Delta\mathrm{e}_\mathrm{N}\right)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Itt $\Delta\bar{y}_k = \bar{C}\Delta x_k$ ami az állapotvektor különbség Ker(C_r)-re (C_r nulltere) való merőleges vetítése, ha $\bar{\mathrm{C}}$ az alábbi alakú:

$$
\bar{\mathrm{C}} = \mathrm{I} - \mathrm{C}_\mathrm{r}^\mathrm{T}\left(\mathrm{C}_\mathrm{r}\mathrm{C}_\mathrm{r}^\mathrm{T}\right)^{-1}\mathrm{C}_\mathrm{r}
\tag{7}
$$

Ez azt jelenti, hogy $\Delta\bar{y}_k$ az állapottér azon részének hatását tartalmazza, melyből nem nyerhető ki információ Δy_k segítségével. Ezt a részt lehetséges Q_1-el külön súlyozni, mely nagyban javíthatja a feladat során kiadódó Diszkrét Algebrai Riccati Egyenlet (DARE) megoldhatóságát. $\Delta e_k = \Delta y_k^r - \Delta r_k$ a differenciális követési hiba. Legyen a differenciális referenciaállapot a következő képlettel megadva:

$$\Delta\tilde{x}_k = C_r^T \left(C_r C_r^T\right)^{-1} \Delta r_k \tag{8}$$

Ezzel a (6) funkcionál ekvivalens módon az alábbi alakra hozható (lásd [2]):

$$\begin{aligned} &J(\Delta x, \Delta\tilde{x}, \Delta u) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left((\Delta x_k - \Delta\tilde{x}_k)^T Q(\Delta x_k - \Delta\tilde{x}_k) + \Delta u_k^T R \Delta u_k\right) + \frac{1}{2}(\Delta x_N - \Delta\tilde{x}_N)^T Q(\Delta x_N - \Delta\tilde{x}_N) \end{aligned} \tag{9}$$

Ahol: $Q = \overline{C}^T Q_1 \overline{C} + C_r^T Q_2 C_r$ és a DARE megoldhatóságának feltétele, hogy a $\left(Q^{1/2}, \Phi\right)$ párnak ne legyenek nem megfigyelhető pólusai az egységkörön. Mivel Φ stabil mátrix, ezért tulajdonképpen Q=0 esetben is teljesül ez a feltétel (lásd [18]). Így $Q_1 = 0$ választható, ha nincs szükség a kimenetre nem ható állapotok eltérésének súlyozására. A követési probléma Lagrange szorzó módszerrel oldható meg, figyelembe véve (5)-öt és az $x_0 = a$ kezdeti feltételt (lásd [3, 4]). A továbbiakban a részleteket mellőzve csak a főbb eredmények kerülnek közlésre. A társváltozó (Lagrange szorzó) szerkezete az alábbi lesz:

$$\lambda_k = P_k \Delta x_k + S_k \Delta\tilde{x}_{k+1} - Q\Delta\tilde{x}_k \tag{10}$$

Itt Q a (9) után definiált súlyozó mátrix, P_k-t és S_k-t pedig a tervezés során szükséges számítani. Egyszerűsítésként használhatók a következő rövidítő jelölések: $SR_k = Q\Delta\tilde{x}_k - S_k \Delta\tilde{x}_{k+1}$ $\lambda_k = P_k \Delta x_k - SR_k$ A peremfeltételek az időhorizont végére az alábbi módon adódnak: $\lambda_N = Q\Delta x_N - Q\Delta\tilde{x}_N \quad \Rightarrow \quad P_N = Q \quad S_N = 0$

Végül a rekurzív számítási szabályok és a kontrol bemenet (11) szerint alakulnak ((8) figyelembe vételével). Látható módon a kiadódott szabályozási törvényszerűség a jól ismert LQ optimális állapot visszacsatolásból és egy referenciajelre vonatkozó előrecsatoló részből áll. Ez utóbbi rész nagyon hasonló az [1]-ben folytonos időre levezetett előrecsatoló részhez. (5) alapján Δx_{k+1}-et Δu_k-ból számítjuk, azaz Δr_{k+1} ismerete szükséges a *k*-adik időpillanatban. A levezetett szabályozó azonban Δr_{k+2} ismeretét is igényli, mely egy lépéses előretekintést jelent. (11) szerint viszont az erősítéseket úgyis csak időben visszafelé lehet meghatározni, azaz a referenciajelet a teljes horizonton előre ismerni kell. Így az egy lépéses előretekintés nem okoz gondot. A következőkben ezekre a véges horizontú eredményekre alapozva kerül levezetésre a végtelen horizontú megoldás, mely már nem fogja igényelni Δr_{k+2} $\left(r_{k+2}\right)$ ismeretét és konstans referenciajelre optimális, időben változó referencia jelre pedig szub-optimális megoldást ad.

$$
\begin{aligned}
&P_N = Q \quad SR_N = QC_r^T\left(C_rC_r^T\right)^{-1}\Delta r_N \\
&P_k = Q + \Phi^T P_{k+1}\Phi - \Phi^T P_{k+1}B\left[B^T P_{k+1}B + R\right]^{-1} B^T P_{k+1}\Phi \\
&SR_k = QC_r^T\left(C_rC_r^T\right)^{-1}\Delta r_k + \Phi^T\left[I + P_{k+1}BR^{-1}B^T\right]^{-1} SR_{k+1} \\
&u_k = -R^{-1}B^T P_{k+1}\left[I + BR^{-1}B^T P_{k+1}\right]^{-1}\Phi\,\Delta x_k + R^{-1}B^T\left[I + P_{k+1}BR^{-1}B^T\right]^{-1} QC_r^T\left(C_rC_r^T\right)^{-1}\Delta r_{k+1} - \\
&- R^{-1}B^T\left[I + P_{k+1}BR^{-1}B^T\right]^{-1} S_{k+1}C_r^T\left(C_rC_r^T\right)^{-1}\Delta r_{k+2} = -R^{-1}B^T\lambda_{k+1}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

A végtelen horizontú eset a véges horizontú megoldásból $k \to \infty$ határátmenettel, és az optimalitási feltételek figyelembe vételével vezethető le. A határátmenet következtében az időben változó Ricatti egyenlet helyett az állandósult állapotra vonatkozó DARE adódik: $P_\infty = Q + \Phi^T P_\infty \Phi - \Phi^T P_\infty B\left[B^T P_\infty B + R\right]^{-1} B^T P_\infty \Phi$ A DARE P_∞ megoldását figyelembe véve (11) felhasználásával λ_{k+1} általános alakja a következő (ez a bemenetre vonatkozó (11)-ben szereplő optimalitási feltételt rögtön kielégíti):

$$
\lambda_{k+1} = P_\infty\left[I + BR^{-1}B^T P_\infty\right]^{-1}\Phi\Delta x_k - \left[I + P_\infty BR^{-1}B^T\right]^{-1} S_1\Delta r_{k+1} - \left[I + P_\infty BR^{-1}B^T\right]^{-1} S_2\Delta r_{k+2} \tag{12}
$$

Az optimalitás másik feltétele egy λ -ra vonatkozó egyenlet teljesülése:

$$
\lambda_k = Q\Delta x_k - QH\Delta r_k + \Phi^T\lambda_{k+1} \quad H = C_r^T\left(C_rC_r^T\right)^{-1} \tag{13}
$$

(12), (11) és (5) felhasználásával (13) egyenletből a következő egyenletrendszer adódik:

$$
\begin{aligned}
&P_\infty\Delta x_k = Q\Delta x_k + \Phi^T P_\infty\left[I + BR^{-1}B^T P_\infty\right]^{-1}\Phi\Delta x_k \quad \forall\Delta x_k \Rightarrow \mathrm{DARE} \\
&-S_1\Delta r_k = -QH\Delta r_k \\
&S_2\Delta r_{k+1} = -\Phi^T\left[I + P_\infty BR^{-1}B^T\right]^{-1} S_1\Delta r_{k+1} \\
&0 = \Phi^T\left[I + P_\infty BR^{-1}B^T\right]^{-1} S_2\Delta r_{k+2}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

A (14)-beli egyenletekből az első bármely Δx_k esetén a DARE-t adja, így a tervezett szabályozó P_∞-el mindig kielégíti. A többi egyenletből az utolsó csak $\Delta r_{k+2} = 0$ esetben teljesül. Ez viszont csak konstans referenciajel esetén áll fenn. Ekkor minden referenciajel különbség zérus és így az első egyenletet követő mindhárom egyenlet teljesül. Időben változó referenciajel esetén viszont az utolsó egyenlet nem teljesíthető, mert $\Delta r_{k+2} \neq 0$. Így időben változó jelre ezzel a sémával LQ optimális megoldás nem kereshető. De a munka célkitűzései között az is szerepel, hogy a referenciajel jövőbeni értékének ismerete ne legyen szükséges egy adott időlépésben. [11] és [12] a (11) kifejezéssel megegyező struktúrájú szabályozási megoldásra kimutatja, hogy sima (differenciálható) referenciajelek esetén 1 lépéses extrapolációval is jól alkalmazható és így az r_{k+2} érték ismerete nem szükséges. Ez a megoldás jelen esetben is alkalmazható és így egy szub-optimális megoldás adódik időben változó referenciajelek esetére. Ha Δr_{k+2}-re 1 lépéses extrapolációt alkalmazunk, akkor (14) utolsó 3 egyenlete két egyenletben összegezhető:

$$\Delta r_{k+2} = 2\Delta r_{k+1} - \Delta r_k \qquad \begin{aligned} &S_1 - \Phi^T \underbrace{\left[I + P_\infty B R^{-1} B^T\right]^{-1}}_{M_2} S_2 = QH \\ &\Phi^T M_2 S_1 + \left(I - 2\Phi^T M_2\right) S_2 = 0 \end{aligned} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} I & -\Phi^T M_2 \\ \Phi^T M_2 & I - 2\Phi^T M_2 \end{bmatrix}}_{Z} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QH \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

(15) utolsó egyenlete megoldható, ha Z invertálható. Bizonyíthatóan Z invertálható és így az egyenlet megoldásai a mátrix inverziós lemma (blokk mátrixokra) felhasználásával a következők:

$$S_1 = \left[I - \Phi^T M_2 \left(\left(I - \Phi^T M_2 \right)^2 \right)^{-1} \Phi^T M_2 \right] QH \qquad S_2 = -\left(\left(I - \Phi^T M_2 \right)^2 \right)^{-1} \Phi^T M_2 QH \tag{16}$$

Ezeket a megoldásokat felhasználva a szub-optimális (időben változó referencia jelekre) és optimális (konstans referencia jelekre) megoldás (input) a következő alakú (az extrapolációt csak az utolsó lépésben véve figyelembe:

$$\begin{aligned} \Delta u_k &= -R^{-1} B^T P_\infty \left[I + B R^{-1} B^T P_\infty \right]^{-1} \Phi \Delta x_k + R^{-1} B^T M_2 S_1 \Delta r_{k+1} - R^{-1} B^T M_2 S_2 \Delta r_{k+2} = \\ &= -K_{x_2} \Delta x_k + K_{S_1} \Delta r_{k+1} - K_{S_2} \Delta r_{k+2} = -K_{x_2} \Delta x_k + \underbrace{\left(K_{S_1} - 2K_{S_2} \right)}_{\overline{K}_{S_1}} \Delta r_{k+1} + K_{S_2} \Delta r_k \end{aligned} \tag{17}$$

(17) azonban csak a centrált szabályozási probléma megoldását (inputját) adja. Ezt felhasználva kapható meg (5),(4) és (3) figyelembe vételével az eredeti rendszer referenciajel követő szabályozásához szükséges input:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k &= -\left(K_{x_1} + K_{x_2} \right) x_k + \overline{K}_{S_1} r_{k+1} + K_{S_2} r_k + \left[K_{S_2} - K_{S1} + \left(K_{x_2} (I - \Phi)^{-1} B + I \right) \mathrm{pinv}(F) \right] r_\infty = \\ &= -K_x x_k + \overline{K}_{S_1} r_{k+1} + K_{S_2} r_k + K_{r_\infty} r_\infty \approx -K_x x_k + \left(\overline{K}_{S_1} + K_{r_\infty} \right) r_{k+1} + K_{S_2} r_k \end{aligned} \tag{18}$$

(18) utolsó részében a módszer alkalmazhatóságához szükséges közelítés szerepel. Ugyanis a végtelen időbeli referenciajel érték a *k*-adik időpontban még nem ismert. Így csak közelítése lehetséges r_{k+1} felhasználásával. Ez konstans referenciajel esetén ugyanúgy optimális megoldást eredményez, időben változó referencia jelre pedig olyan mintha mindig az aktuális referenciajel érték,

mint munkapont környezetében centrálnánk a rendszert. Az így megvalósított rendszer tulajdonságait a következő fejezet ismerteti.

A LEVEZETETT VÉGTELEN HORIZONTÚ SZABÁLYOZÁS TULAJDONSÁGAINAK KIMONDÁSA ÉS BIZONYÍTÁSA

1. TÉTEL (garantált aszimptotikus stabilitás): A javasolt végtelen horizontú kimenetkövető megoldás (18) garantálja az aszimptotikus stabilitást konstans (vagy egy idő múlva konstanssá váló), korlátos, kimenet referenciajelek esetén.

Bizonyítás: Konstruktív bizonyítás alkalmazható. Az eredményül kapott LQ optimális állapot visszacsatolás garantáltan stabil, így csak a referenciajel hatása kérdéses. A *k*-adik időpillanattól indulva és $r_{k+i} = r_\infty = \mathrm{const} < \infty \quad \forall i \geq 0$ kifejezést figyelembe véve (1)-ből és (18)-ból az alábbi alak adódik:

$$x_{k+1} = \underbrace{\left(A - BK_x\right)}_{\Phi_2} x_k + B\left(\overline{K}_{S_1} + K_{r_\infty}\right) r_\infty + BK_{S_2} r_\infty \tag{19}$$

(19)-ban Φ_2 egy stabil rendszermátrix (minden sajátértéke az egységkörön belül van) melynek *k*-adik hatványaihoz kapcsolódóan beláthatók az alábbi tulajdonságok (a második csak a későbbi tételek bizonyításához szükséges):

$$\begin{aligned}
&1.\quad \rho\left(\Phi_2\right) < 1 \quad \lim_{k\to\infty} \Phi_2^k = 0 \quad \wedge \quad \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_2^k = \left(I - \Phi_2\right)^{-1} \\
&2.\quad \exists K \in \Re, \infty > K > 0, \quad \left\|\Phi_2^k\right\| < K \quad \forall k \quad \to \sum_{k=0}^{\infty} \left\|\Phi_2^k\right\| = K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left\|\Phi_2^k\right\|}{K} \quad \Rightarrow \\
&\qquad \exists R_\sigma \in \Re, 1 > R_\sigma > 0 \to \quad R_\sigma^k > \frac{\left\|\Phi_2^k\right\|}{K} \forall k \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left\|\Phi_2^k\right\| < K \sum_{k=0}^{\infty} R_\sigma^k = K \frac{1}{1 - R_\sigma} < \infty
\end{aligned} \tag{20}$$

Itt $\left\|\ldots\right\|$ az indukált l_2 mátrixnormát jelenti, azaz a mátrix maximális szinguláris értékét. Az aszimptotikus stabilitás (20)/1, (19) és (18) felhasználásával a következő módon bizonyítható:

$$\begin{aligned}
x_{k+n} &= \Phi_2^n x_k + \sum_{j=0}^{n} \Phi_2^j B\left(\overline{K}_{S_1} + K_{r_\infty} + K_{S_2}\right) r_\infty \\
x_\infty &= \Phi_2^\infty x_k + \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_2^j \left(BK_{x_2} \left(I - \Phi\right)^{-1} + I\right) B\mathrm{pinv}(F) r_\infty = \\
&= \left(I - \Phi_2\right)^{-1} \left(BK_{x_2} \left(I - \Phi\right)^{-1} + I\right) B\mathrm{pinv}(F) r_\infty \quad \text{ahol} \quad \Phi_2 = \Phi - BK_{x_2} \Rightarrow \\
x_\infty &= \left(I - \Phi_2\right)^{-1} \underbrace{\left(BK_{x_2} + \left(I - \Phi\right)\right)}_{I - \Phi_2} \left(I - \Phi\right)^{-1} B\mathrm{pinv}(F) r_\infty = \left(I - \Phi\right)^{-1} B\mathrm{pinv}(F) r_\infty < \infty
\end{aligned} \tag{21}$$

2. TÉTEL (garantált aszimptotikusan nulla követési hiba): A javasolt végtelen horizontú kimenetkövető megoldás (18) garantálja az aszimptotikusan nulla követési hibát konstans (vagy egy idő múlva konstanssá váló), korlátos, kimenet referenciajelek esetén.

Bizonyítás: (21), (2) és (4) kombinációjával:

$$e_\infty = C_r \cdot x_\infty - r_\infty = C_r (I-\phi)^{-1} B \cdot \mathrm{pinv}\left(C_r (I-\phi)^{-1} B\right) \cdot r_\infty - r_\infty = r_\infty - r_\infty = 0 \tag{22}$$

3. TÉTEL (a szeparációs elv kielégítése): A javasolt végtelen horizontú kimenetkövető megoldás (18) garantálja a szeparációs elv teljesülését mind konstans, mind időben változó referenciajelekre és tetszőleges (determinisztikus vagy sztochasztikus) állapotbecslőre.

Bizonyítás: A diszkrét idejű aktuális állapotbecslő (akár determinisztikus akár sztochasztikus) egyenletei a következők:

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + L_o\left(y_k - C\bar{x}_k\right) \qquad \bar{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \qquad x^e_{k+1} = \hat{x}_{k+1} - x_{k+1} = \left(I - L_o C\right)Ax^e_k \tag{23}$$

Itt $\hat{x}_k$ a becsült állapot, y_k pedig a mért kimenet (lásd (1)). A kibővített rendszer állapotdinamikai egyenletei (1), (18) és (23) felhasználásával írhatók fel:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x^e_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK_x & -BK_x \\ 0 & \left(I - L_o C\right)A \end{bmatrix}}_{A_a} \begin{bmatrix} x_k \\ x^e_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B\left(\bar{K}_{S_1} + K_{r_\infty}\right)r_{k+1} + BK_{S_2} r_k \\ 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

A_a használatával a kibővített rendszer pólusai az alábbi egyenletből számíthatók: $\det\left(zI - A_a\right) = \det\left(zI - A + BK_x\right)\det\left(zI - A + L_o CA\right) = 0$ látható, hogy sem a referenciajel, sem a rendszer állapotai nem befolyásolják a becslési hiba dinamikáját, így a szeparációs elv teljesül.

4. TÉTEL (BIBO és l_1 / l_2 stabilitás): A javasolt végtelen horizontú kimenetkövető megoldás (18) garantálja a BIBO és l_1 / l_2 stabilitást.

Bizonyítás: A referenciajel l_∞ és l_1 / l_2 normái a következő módon definiáltak:

$$\|r_k\|_\infty = \max_k |r_k| = R_m < \infty \quad \|r_k\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |r_k| \quad \wedge \quad \|r_k\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |r_k|^2} \quad \text{ha} \quad r_k \in l_1 \quad \text{akkor} \quad r_k \in l_2 \tag{25}$$

(25) utolsó megjegyzése alapján elegendő a stabilitást az l_1-es jelekre vizsgálni, mert az jelenti a tágabb halmazt. Az l_1-es jelek igen széles köre fedhető le az alábbi felső korlátozással (r_k komponenseire vonatkozóan).

$$r_k = \begin{bmatrix} r_{1k} & r_{2k} & \dots & r_{pk} \end{bmatrix}^T \quad |r_{ik}| \le A_i e^{-ak} \quad \to \quad |r_k| \le \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_p^2}\, e^{-ak} = Ae^{-ak}$$
$$\|r_k\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |r_k| \le A \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak} \tag{26}$$

A BIBO (l_∞) stabilitás (18), (20), (21) és (25) felhasználásával a következő módon bizonyítható:

$$x_1 = \Phi_2 x_0 + B\left(\overline{K}_{S_1} + K_{r_\infty}\right) r_1 + BK_{S_2} r_0$$
$$x_n = \Phi_2^n x_0 + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \Phi_2^k B\left(\overline{K}_{S_1} + K_{r_\infty}\right) r_{n-k}\right] + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \Phi_2^k BK_{S_2} r_{n-1-k}\right]$$
$$|x_n| \le KR_\sigma^n |x_0| + K\left[\sum_{k=0}^{n-1} R_\sigma^k\right]\left(\left\|B\left(\overline{K}_{S_1} + K_{r_\infty}\right)\right\| + \left\|BK_{S_2}\right\|\right) R_m \quad \Rightarrow$$
$$\|x_k\|_\infty = \max_n |x_n| < K|x_0| + K\frac{\left(\left\|B\left(\overline{K}_{S_1} + K_{r_\infty}\right)\right\| + \left\|BK_{S_2}\right\|\right)}{1 - R_\sigma} R_m < \infty \tag{27}$$
$$\|y_k\|_\infty = \max_n |C_r x_n| < \|C_r\| K |x_0| + \|C_r\| K \frac{\left(\left\|B\left(\overline{K}_{S_1} + K_{r_\infty}\right)\right\| + \left\|BK_{S_2}\right\|\right)}{1 - R_\sigma} R_m < \infty$$
$$\|e_k\|_\infty = \max_n |C_r x_n - r_n| < \|C_r\| K |x_0| + \left\{\|C_r\| K \frac{\left(\left\|B\left(\overline{K}_{S_1} + K_{r_\infty}\right)\right\| + \left\|BK_{S_2}\right\|\right)}{1 - R_\sigma} + 1\right\} R_m < \infty$$

Az l_1 / l_2 stabilitás bizonyítása (26) és (27) felhasználásával a következő módon tehető meg:

$$x_n = \Phi_2^n x_0 + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \Phi_2^k B\left(\overline{K}_{S_1} + K_{r_\infty}\right) r_{n-k}\right] + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \Phi_2^k BK_{S_2} r_{n-1-k}\right]$$
$$|x_n| \le KR_\sigma^n |x_0| + \left\|B\left(\overline{K}_{S_1} + K_{r_\infty}\right)\right\| AK \left[\sum_{k=0}^{n-1} R_\sigma^k e^{-a(n-k)}\right] + \left\|BK_{S_2}\right\| AK \left[\sum_{k=0}^{n-1} R_\sigma^k e^{-a(n-1-k)}\right]$$
$$\|x_k\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| \le \frac{K|x_0|}{1 - R_\sigma} + \frac{\left\|B\left(\overline{K}_{S_1} + K_{r_\infty}\right)\right\| AK}{1 - R_\sigma}\left[\sum_{k_1=1}^{\infty} e^{-ak_1}\right] + \frac{\left\|BK_{S_2}\right\| AK}{1 - R_\sigma}\left[\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{-ak_2}\right]$$
$$\|x_k\|_1 \le \frac{K|x_0|}{1 - R_\sigma} + \frac{\left\|B\left(\overline{K}_{S_1} + K_{r_\infty}\right)\right\| AKe^{-a}}{\left(1 - R_\sigma\right)\left(1 - e^{-a}\right)} + \frac{\left\|BK_{S_2}\right\| AK}{\left(1 - R_\sigma\right)\left(1 - e^{-a}\right)} < \infty \tag{28}$$
$$\|y_k\|_1 \le \frac{\|C_r\| K |x_0|}{1 - R_\sigma} + \frac{\|C_r\| \left\|B\left(\overline{K}_{S_1} + K_{r_\infty}\right)\right\| AKe^{-a}}{\left(1 - R_\sigma\right)\left(1 - e^{-a}\right)} + \frac{\|C_r\| \left\|BK_{S_2}\right\| AK}{\left(1 - R_\sigma\right)\left(1 - e^{-a}\right)} < \infty$$
$$\|e_k\|_1 \le \frac{\|C_r\| K |x_0|}{1 - R_\sigma} + \frac{\|C_r\| \left\|B\left(\overline{K}_{S_1} + K_{r_\infty}\right)\right\| AKe^{-a}}{\left(1 - R_\sigma\right)\left(1 - e^{-a}\right)} + \frac{\|C_r\| \left\|BK_{S_2}\right\| AK}{\left(1 - R_\sigma\right)\left(1 - e^{-a}\right)} + \frac{A}{1 - e^{-a}} < \infty$$

5. TÉTEL (véges követési hiba rámpa referenciajelre): A javasolt végtelen horizontú kimenetkövető megoldás (18) minden lépésben garantálja a véges követési hibát rámpa típusú (végtelenbe tartó!!) referenciajelek esetére.

Bizonyítás: Egy rámpa referenciajel mindig felírható a következő alakban: $r_k = r_0 + k\Delta r^r$

Így (1), (17) és (18) alapján a rendszer állapotának és így a követési hibának a dinamikája a következő módon alakul:

$$x_1 = \Phi_2 x_0 - BK_{S_2}\Delta r^r + B\underbrace{\left(K_{x_2}(I-\Phi)^{-1}B + I\right)pinv(F)}_{K_r}\left(r_0 + \Delta r^r\right)$$

$$x_2 = \Phi_2 x_1 - BK_{S_2}\Delta r^r + BK_r\left(r_0 + 2\Delta r^r\right) =$$

$$= \Phi_2^2 x_0 - (\Phi_2 + I)BK_{S_2}\Delta r^r + (\Phi_2 + I)BK_r r_0 + (\Phi_2 + 2I)BK_r\Delta r^r$$

$$x_n = \Phi_2^n x_0 - \left[\sum_{k=0}^{n-1}\Phi_2^k\right]BK_{S_2}\Delta r^r + \left[\sum_{k=0}^{n-1}\Phi_2^k\right]BK_r r_0 + \left[\sum_{k=1}^{n}k\Phi_2^{n-k}\right]BK_r\Delta r^r$$

$$e_n = y_n - r_n = C_r x_n - r_0 - n\Delta r^r =$$

$$= C_r\Phi_2^n x_0 - C_r\left[\sum_{k=0}^{n-1}\Phi_2^k\right]BK_{S_2}\Delta r^r + C_r\left[\sum_{k=0}^{n-1}\Phi_2^k\right]BK_r r_0 - r_0 +$$

$$\underbrace{+ C_r\left[\sum_{k=1}^{n}k\Phi_2^{n-k}\right]BK_r\Delta r^r - nC_r\left[\sum_{k=0}^{\infty}\Phi_2^k\right]BK_r\Delta r^r}_{-C_r\left[\sum_{k=1}^{n}k\Phi_2^k\right]BK_r\Delta r^r - nC_r\left[\sum_{m=n+1}^{\infty}\Phi_2^m\right]BK_r\Delta r^r} \quad \text{mivel} \quad I = C_r\left(I-\Phi_2\right)^{-1}BK_r \tag{29}$$

(29) második részét (19) felhasználásával alakítva, végül a következő felső normakorlát adódik a követési hibára:

$$\begin{aligned}|e_n| &< \|C_r\|KR_\sigma^n|x_0| + \|C_r\|\frac{K}{1-R_\sigma}\left|BK_{S_2}\Delta r^r\right| + \|C_r\|\frac{K}{1-R_\sigma}|BK_r r_0| + |r_0| + \\ &+ \|C_r\|\frac{KR_\sigma}{(1-R_\sigma)^2}\left|BK_r\Delta r^r\right| + \|C_r\|nR_\sigma^n\frac{KR_\sigma}{(1-R_\sigma)}\left|BK_r\Delta r^r\right| < \infty\end{aligned} \tag{30}$$

Ezzel bizonyított, hogy minden lépésben véges lesz a követési hiba rámpa típusú referencia jelre, és a hiba nagysága függ a rámpa jel meredekségétől. Mint az majd a következő szimulációs fejezetből látható lesz, megfelelő súlyozással rámpa és időben változó jelekre is igen jó követés (minimális követési hiba) érhető el a javasolt módszerrel.

ALKALMAZÁSI PÉLDÁK EGY NÉGYROTOROS HELIKOPTER PÁLYAKÖVETŐ SZABÁLYOZÁSA KAPCSÁN

A felhasznált négyrotoros helikopter modell egy kutatási együttműködés keretében készül [11, 12]. [13]-ban elkészült a helikopter nemlineáris szimulációja MATLAB Simulink környezetben. Ebből lebegésben linearizálva [14]-ben egy folytonos idejű, LTI modell készült. Ennek a modellnek a továbbfejlesztéseként adódott egy pontosított LTI modell, amit az itt elvégzett tesztekhez használtam fel. A linearizált modell állapotai, mért kimenetei és bemenetei a következők:

– *Állapotok:* x = [motor fordulatszámok $(n_1 \quad n_2 \quad n_3 \quad n_4)$, sebesség komponensek *test koordinátarendszerben* (u v w), szögsebesség komponensek *test koordinátarendszerben* (P Q R), Euler szögek (ϕ θ ψ), függőleges pozíció *föld koordinátarendszerben* (Z)]
– *Mért kimenetek:* y = [motor fordulatszámok $(n_1 \quad n_2 \quad n_3 \quad n_4)$, gyorsulások *test koordinátarendszerben* (du/dt dv/dt dw/dt), szögsebesség komponensek *test koordinátarendszerben* (P Q R), Euler szögek (ϕ θ ψ), mért magasság (h = -Z sík terepet feltételezve)]
– *Bemenetek:* u = [bólintó parancs δ_{pitch}, bedöntési parancs δ_{roll}, legyező parancs δ_{yaw}, emelkedési / süllyedési parancs $\delta_{asc/desc}$]

Az így kapott folytonos idejű modell irányítható és megfigyelhető. Ebből transzformációval készült a diszkrétidejű modell zérusrendű tartószervet feltételezve. A mintavételi idő a nyílt hurok sávszélessége alapján lett megválasztva T = 0,0125 sec értékűre. Az eredményül kapott diszkrétidejű modell úgyszintén irányítható és megfigyelhető. A kifejlesztett szabályozás működése ezen a modellen került tesztelésre konstans (vagy azzá váló) és időben változó referencia jeleket egyaránt alkalmazva.

A kimenetkövetésben nem súlyozott állapotok és a bemenet súlyozása az inverz négyzetek módszere alapján lett meghatározva, figyelembe véve a különböző állapotokkal betartandó határértékeket. A cél az volt, hogy a szabályozott rendszer működése során a lineáris tartományban maradjon és így a lineáris szabályozó esetleg a nemlineáris rendszeren is jól működjön.

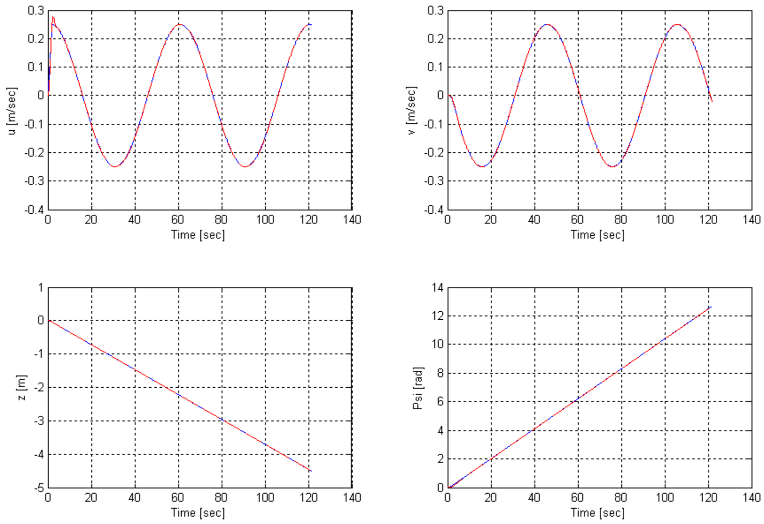
A figyelembe vett felső korlátok a következők: 2 fok/sec a P, Q, R szögsebesség komponensekre, 5 fok az Euler szögekre, 3 egység a kontrol bemenetekre. A többi súly optimális értéke próbálgatással lett meghatározva. A szabályozó szimulációkkal való tesztelése során feltételezés volt az összes állapot mérhetősége, így állapotbecslőt nem kellett alkalmazni és a mért kimenetek nem kerültek felhasználásra.

A követendő referenciajelek test rendszerben az (u v Z) sebességkomponensek és a ψ orientáció voltak. A súlyozó mátrixok a következők (itt < > diagonális mátrixot jelöl):

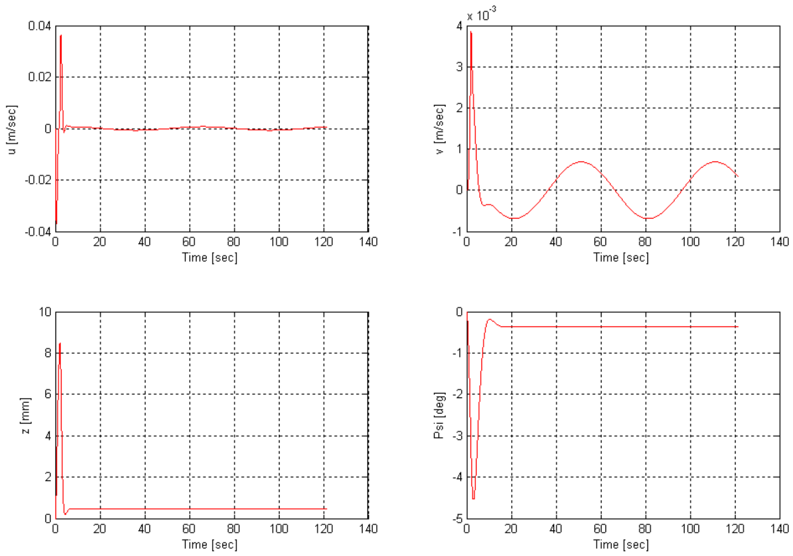
$$Q_1 = <1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 820 \;\; 820 \;\; 0 \;\; 135 \;\; 135 \;\; 0 \;\; 0>$$

$$Q_2 = <1000 \;\; 1000 \;\; 1000 \;\; 10000> \qquad R = <1e-1 \;\; 1e-1 \;\; 1e-1 \;\; 1e-1>$$

A megtervezett szabályozó kétféle összetett térbeli mozgásformán lett tesztelve. Az első esetben egy emelkedő egyenes pályán halad a helikopter úgy, hogy közben folyamatosan forog a függőleges tengelye körül. A második esetben egy emelkedő spirál pályán halad végig úgy, hogy közben az orra mindig a pálya érintője irányába mutat (azaz forog a függőleges tengelye körül). Mindkét esetben föld rendszerben a szükséges sebesség komponensek (u,v,w) kerültek megadásra, és a rendszer a mért Euler szögekkel test rendszerbe transzformált komponenseket, illetve w esetén a belőle integrálással kapott Z magasságot követi (egy referenciajel átalakító transzformáció került alkalmazásra). Erre azért van szükség, mert a bonyolult térbeli mozgások során a föld és test rendszerbeli sebesség komponens nagyságok közt kicsi, de kumuláltan jelentős hibákat okozó eltérések lehetnek. Az első teszteset eredményei az 1-5, míg a második esetéi a 6-9 ábrákon láthatók.

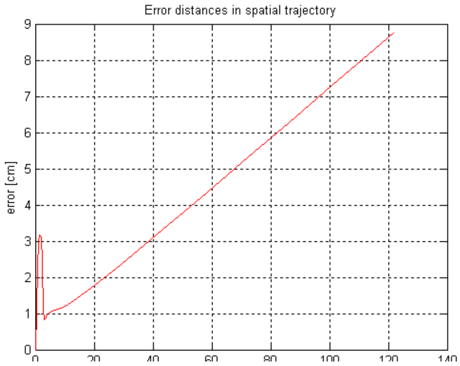


1. ábra. A referenciajelek követése az első esetben (test rendszerben)

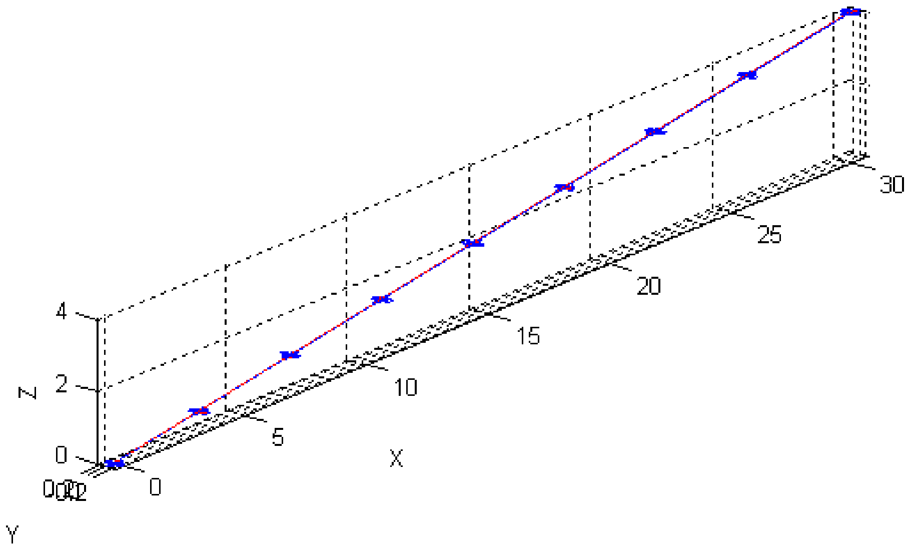


2. ábra. A referenciajelek követési hibái az első esetben (test rendszerben)

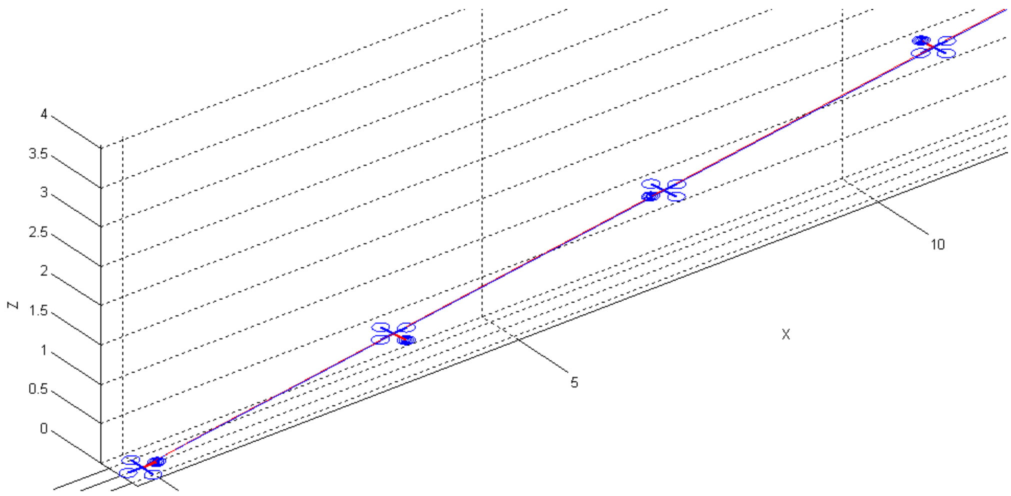
Az 1. ábrán kék szín ábrázolja a referencia jelet és piros az aktuális rendszer állapotot. Láthatóan a sebességkomponensekre a követési hibák közel zérus értékűek, ami kiváló. A magasság követési hibája 1 mm alatti, az orientációjé pedig 0,5 fok alatti, ami szintén kiváló. A 3. ábra mutatja a térbeli referencia pálya és a tényleges pálya közti eltérést. A 4. és 5. ábrákon a teljes térbeli pálya (kék referencia, piros tényleges) és annak egy nagyított részlete (ahol jól látszik a helikopter orientáció változása) látható.



3. ábra. A térbeli követési hiba nagysága föld rendszerben



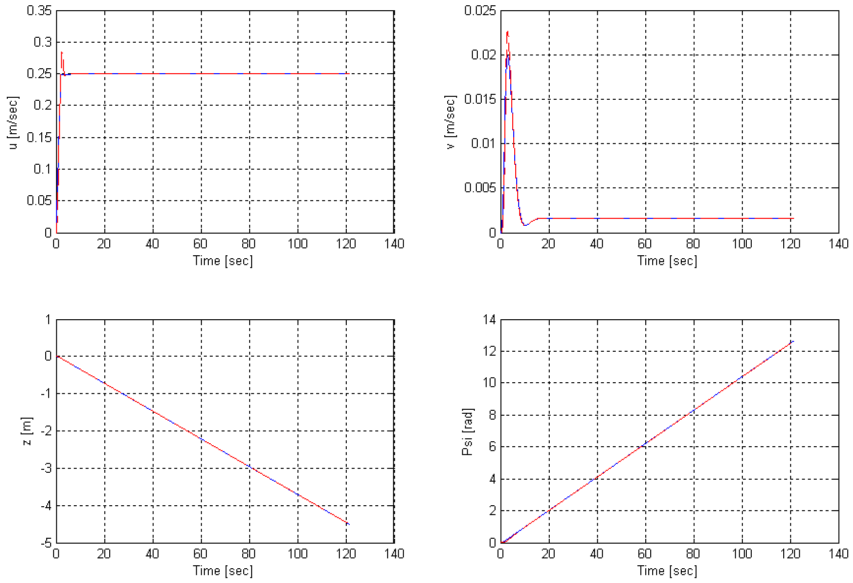
4. ábra. A térbeli pályák föld rendszerben



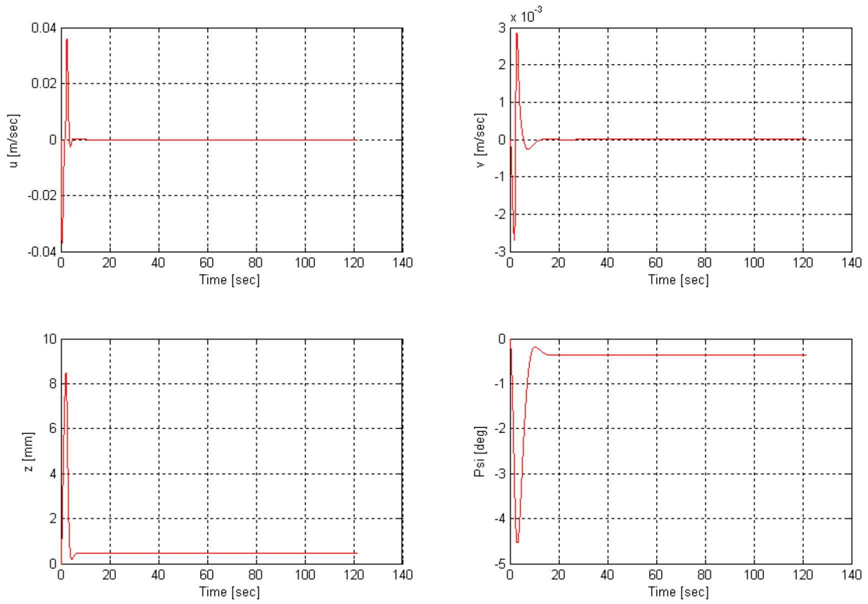
5. ábra. A nagyításon jól látható a helikopter folyamatos orientáció változása

A 4. ábrán úgy látszik, hogy a helikopter igen pontosan követi a megadott pályát. A 3. ábra azonban megmutatja, hogy egyre növekvő távolság van a követendő és tényleges pálya között, mely

122 másodperc múlva már majdnem 9cm. Ennek oka, hogy a helikopter állandó forgása miatt szinuszosra adódó v sebességkomponens követésében folyamatosan hibák vannak, melyek az elmozdulásban integrálva kumulálódnak. Ezen a szabályozó átsúlyozásával lehet majd még javítani.

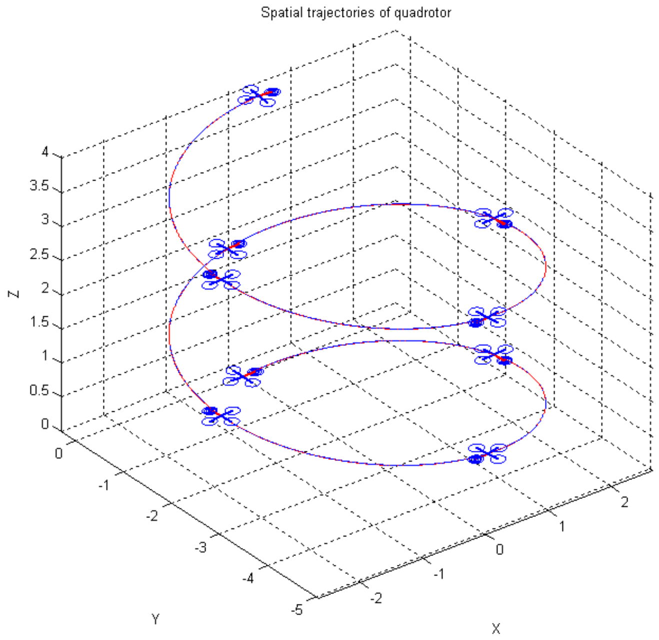


6. ábra. A referenciajelek követése a második esetben (test rendszerben)

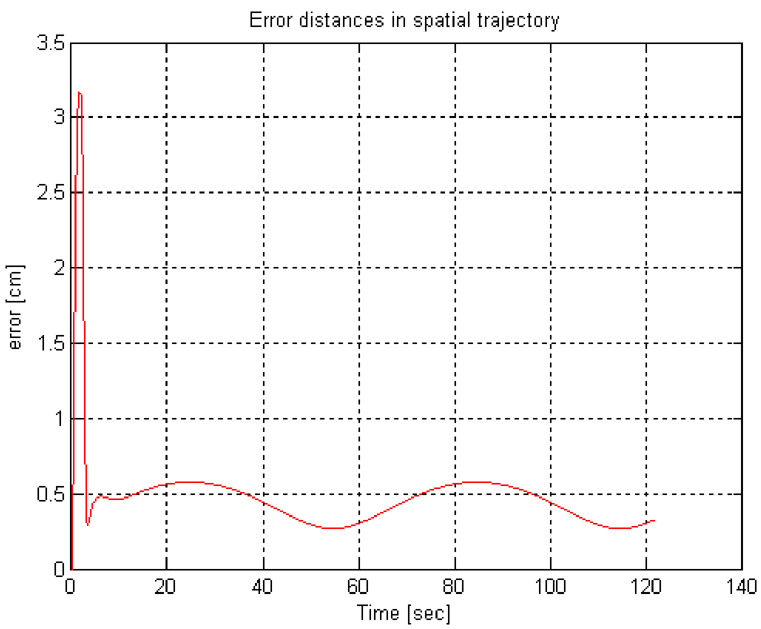


7. ábra. A referenciajelek követési hibái a második esetben (test rendszerben)

A 6. és 7. ábrák mutatják a második esetben a referenciajelek test rendszerbeli követését és követési hibáit. Látható, hogy itt az u és v sebesség komponensek állandósult állapotban konstansra adódnak így követési hibáik jóval kisebbek, mint az előző esetben. A Z magasság és ψ Euler szög követésének hibái közel azonosak. A 8. és 9. ábrákon látható, hogy ebben az esetben a követés minősége sokkal jobb, a térbáli pályák közti eltérés állandósult állapotban nem megy 0,6 cm fölé, ami kiváló eredmény. Mindeközben a helikopter orientációja folyamatosan változik a pálya mentén a kitűzött célnak megfelelően.



8. ábra. A térbeli pályák föld rendszerben



9. ábra. A megadott és tényleges térbeli pálya közötti eltérés alakulása föld rendszerben

ÖSSZEGZÉS ÉS TOVÁBBLÉPÉSI LEHETŐSÉGEK

Jelen cikkben a tavalyi munka folytatásaként egy végtelen horizontú LQ optimális kimenet követő szabályozó továbbfejlesztése történt meg. A javított módszer végtelen horizontú optimális megoldást ad konstans, és nagy horizontú szub-optimálisat időben változó referencia jelek esetére. Konstans referenciajelekre garantált az aszimptotikus stabilitás és így a zérus követési hiba. Időben változó jelekre is garantált a szeparációs elv kielégítése, valamint a BIBO, l_1 / l_2 stabilitás. Rámpa típusú jelre garantált a véges követési hiba minden időlépésben. A módszer használhatóságát két szimulációs példa is bizonyítja négyrotoros helikopter bonyolult térbeli pályákon való végigvezetésével.

A módszer továbbfejlesztése több irányban lehetséges és szükséges. Egyrészt a kipróbálás sztochasztikus állapotbecslővel a mérési zajok figyelembe vételével. Másrészt szélzavarás elnyomásának megoldása terhelésbecslővel. Harmadrészt a robusztus stabilitás vizsgálata.

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] MICHAEL ATHANS – PETER L. FALB: Optimal Control, An introduction to the Theory and its Applications, McGraw-Hill Book Company, 1966.

[2] BRIAN D. O. ANDERSON – JOHN B. MOORE: Optimal Control, Linear Quadratic Methods, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ; 1989.

[3] TONGWEN CHEN – BRUCE FRANCIS: Optimal Sampled-Data Control Systems, Springer-Verlag London Limited, 1995.

[4] GENE F. FRANKLIN – J. DAVID POWEL – MICHAEL L. WORKMAN: Digital Control of Dynamic Systems, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

[5] JEFFREY B. BURL: Linear Optimal Control, H_2 and H_∞ Methods, Addison Wesley Longman Inc., Menlo Park California, 1999.

[6] MIKE J. GRIMBLE – ANDRZEJ W. ORDYS: Predictive Control for Industrial Applications, Ann. Rev. in Cont., vol. 25, 2001, 13-24. o.

[7] E. MOSCA – A. CASAVOLA: Deterministic LQ Preview Tracking Design, IEEE Trans. on Aut. Cont., vol. 40, 1995, 1278-1281. o.

[8] ASIF FAROOQ – DAVID J. N. LIMEBEER: Path Following of Optimal Trajectories Using Preview Control, in Proc. of 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005, Seville, Spain, 2005, 2787-2792. o.

[9] JACQUES L. WILLEMS – IVEN M. Y. MAREELS: A Rigorous Solution of the Infinite Time Interval LQ Problem with Constant State Tracking, Sys. \& Cont. Let., vol. 52, 2004, 289-296. o.

[10] ENRIQUE BARBIERI – ROCIO ALBA-FLORES, On the Infinite--horizon LQ Tracker, Sys. \& Cont. Let., vol. 40, 2000, 77-82. o.

[11] BAUER PÉTER: Egy pontos, LQ optimális megoldás végtelen horizontú kimenetkövető szabályozás tervezésére, Repüléstudományi közlemények különszám, 2008. április 11.

[12] PÉTER BAUER: An Exact Solution for the Infinite Horizon LQ Optimal Output Tracking Problem, in Proc. of Multi-Conference on Systems and Control 2008, San Antonio, Texas, USA, 2008.

[13] PÉTER BAUER: The properties of an infinite horizon LQ optimal tracker with time varying references, in Proc. of Vehicle System Dynamics Identification and Anomalies 2008, Budapest, Hungary, 2008

[14] PÉTER GÁSPÁR – ALEXANDROS SOUMELIDIS – BÉLA LANTOS – ZOLTÁN PROHÁSZKA – PÉTER BAUER: Embedded computer based nonlinear vehicle control: a quadrotor helicopter experiment, in Proc. of Vehicle System Dynamics Identification and Anomalies 2006, Budapest, Hungary, 2006

[15] ALEXANDROS SOUMELIDIS – PÉTER GÁSPÁR - PÉTER BAUER – BÉLA LANTOS - ZOLTÁN PROHÁSZKA: Design of an embedded microcomputer based mini quadrotor UAV, in Proc. of European Control Conference 2007, Kos, Greece, 2007.

[16] RITZINGER GYÖRGY: Szitakötő négyrotoros helikopter szabályozása állapotvisszacsatolás és állapotbecslő alkalmazásával, Diplomaterv, Budapest; 2007.

[17] PÉTER BAUER – GYÖRGY RITZINGER – ALEXANDROS SOUMELIDIS – JÓZSEF BOKOR: LQ Servo Control Design with Kalman Filter for a Quadrotor UAV, Periodica Polytechnica Transportation Engineering, Vol. 36/1-2, pp. 9-14, 2008.

[18] PÉTER BAUER – BALÁZS KULCSÁR. – JÓZSEF BOKOR: On the use of proper weighting in reference tracking optimal control with guaranteed DARE solvability. Proceedings of IEEE 16th Mediterranean Conference on Control and Automation. Ajaccio, Corsica, France. 2008. CD pp. 901-906.