Veress Árpád – Gallina Tibor – Rohács József

SÚRLÓDÁSMENTES KÖZEG NUMERIKUS ÁRAMLÁSTANI MODELLEZÉSE ÉS ÉRVÉNYESÍTÉSE

ÖSSZEFOGLALÁS

A publikáció célja egy 2 dimenziós, az összenyomható áramlás modellezésére alkalmas, kis számítógépi kapacitásigénnyel rendelkező program felépítésének, működésének és érvényesítésének bemutatása.

Az implementált algoritmus az összenyomható közegre vonatkozó Euler egyenletek konzervatív alakjára épül. A diszkretizáció alapja egy strukturált, cella középpontú véges térfogat módszer, amelyet objektum orientált C++ környezetben valósítottunk meg. A konvektív tagok térbeli diszkretizálására az úgy nevezett Roe által közelített Riemann megoldót implementáltuk. A térbeli diszkretizáció rendjének növelése az MUSCL (Monotone Upstream Schemes for Conservation Laws) eljárás, a monotonitás megőrzése MinMod típusú határoló segítségével történt. Az algebrai egyenletek megoldására egy negyedrendű Runge-Kutta eljárást alkalmaztunk. A peremfeltételek meghatározása a karakterisztikák módszerével történt a belépő és a kilépő peremen. A szilárd fal peremek esetén a „rugalmas fal” típusú megoldást alkalmaztuk a szoftver számítási sebességének növelése érdekében. Az eljárás leginkább a repülőgép ipar és az áramlástani gépek tervezése szempontjából lehet fontos, ezért az Euler megoldó validációját egy NACA 65-410 típusú szárny profil körüli, és az ugyan ezen profil segítségével kialakított lapátrácsban kialakult áramlásra végeztük el.

JELÖLÉSJEGYZÉK

Latin betűk, jelölések:

- A: F fluxus-vektor Jacobi-féle mátrixa;
- C: $\vec{H}$ fluxus-vektor Jacobi-féle mátrixa;
- C_p: állandó nyomáson vett fajhő [J/(kgK)];
- C_p: nyomástényező;
- C_v: állandó térfogaton vett fajhő [J/(kgK)];
- c: hangsebesség [m/s];
- c: húrhossz [m];
- E: torlóponti energia [J/kg];

- e: statikus energia [J/kg];
- $\vec{e}_x$: x irányú egységvektor;
- $\vec{e}_y$: y irányú egységvektor;
- F: konvektív fluxusvektor (x komponens);
- G: konvektív fluxusvektor (y komponens);
- $\vec{H}$: Euler-egyenlet teljes fluxusvektora;
- $\widetilde{H}$: numerikus fluxus-függvény;
- H: torlóponti entalpia [J/kg];
- k: merevségi tényező;
- L: C mátrix bal oldali sajátvektor mátrixa;
- M: Mach-szám;
- N_p: a számítási tér összes pontjainak száma [db];
- N_f: az ellenőrző térfogatot határoló oldalak száma [db];
- n: normális irány;
- $\vec{n}$: kifelé mutató normál egységvektor (n_x, n_y) komponensekkel;
- q_1: dinamikus nyomás a távoli rááramlásban [Pa];
- p: statikus nyomás [Pa];
- p^{to}: torlóponti nyomás [Pa];
- $r_n^{(i)}$: jobboldali normális irányú sajátvektorok;
- R: C mátrix jobb oldali sajátvektor mátrixa;
- R: specifikus gázállandó (levegőre: 287,2 [J/(kgK]);
- $\Re$: reziduum;
- Re: Reynolds-szám;
- $\vec{s}$: $\vec{n}$-ra merőleges, vele jobbrendszert alkotó egységvektor;
- t: idő [s];
- T: statikus hőmérséklet [K];
- T^{to}: torlóponti hőmérséklet [K];
- U: konzervatív változók vektora;
- u: x irányú sebességkomponens [m/s];
- $\vec{V}$: sebességvektor (u, v, w) komponensekkel [m/s];
- V: abszolút sebesség nagysága [m/s];

- v: y irányú sebességkomponens [m/s];
- W: karakterisztikus változók vektora;
- w: z irányú sebességkomponens [m/s];
- x,y,z: Descartes-féle térbeli változók;

Görög betűk, jelölések:

- α : sebességvektor iránya [°];
- α : csillapítási tényező;
- α_k : Runge-Kutta együttható;
- β : kompressziós paraméter, konstans;
- β_l : áramlás szöge [°] (tengelytől mérve);
- Δ : két állapot közötti eltérés;
- ε : stabilizáló tag hangoló paramétere;
- Γ : Ω ellenőrzőfelületet határoló oldalfal-hossz [m];
- γ : fajhőviszony;
- κ : rekonstrukciós paraméter;
- λ : C Jacobi-féle mátrix sajátértéke;
- Λ : sajátérték mátrix;
- μ : súlyozó paraméter;
- ρ : sűrűség [kg/m^3];
- τ : súlyozó-paraméter;
- χ : Roe által átlagolt sűrűség;
- Ω : ellenőrző felület [m^2];

Indexek:

- : statikus állapotjelzők;
- ‾: vektormennyiség;
- ˆ: Roe-féle paramétervektor-elem;
- *: referencia állapot;
- +: pozitív (pl. sajátérték);
- -: negatív (pl. sajátérték);

- *1*: számítási térből extrapolálva, rááramlási paraméter;
- *L*: bal oldala a cellafalnak;
- *i,j*: térbeli indexek;
- *in*: bemenet (input);
- *l*: lokális;
- *n*: $\vec{n}$ irányában;
- *n*: időbeli index;
- *out*: kimenet (output);
- *R*: jobb oldala a cellafalnak;
- *R,B,S:* múlt, jelen és jövő (paraméterek a peremen);
- *S*: a következő időlépéshez tartozó, a peremen érvényes paraméter;
- *s*: $\vec{s}$ irányában;
- *st*: statikus állapotjelzők;
- *to*: torlóponti állapotjelzők;

Rövidítések:

- BC: Boundary Condition (peremfeltétel);
- CFL: Courant szám;
- CFD: Computational Fluid Dynamics;
- DNS: Direkt Numerikus Szimuláció
- ENO: Essentially Non-Oscillatory (schemes);
- LE, le: belépőél (Leading Edge);
- MUSCL: Mon. Upstream Schemes for Con. Laws;
- Re: Reynolds szám;
- TE, te: kilépőél (Trailing Edge);
- TVD: Total Variation Diminishing;

BEVEZETÉS

A mérnöki tervezés két alapvető eszköze a tervezés és a vizsgálat. E két eljárás kombinációja adja a tervezési folyamat iteratív jellegét. Az áramlás számítógépes modellezése kezdetben elsősorban az analízist, vagyis a vizsgálatot segítette oly módon, hogy alkalmazásával a mérések száma volt csökkenthető, így a tervezés költségei is jelentősen csökkentek. A számítási teljesítmény növekedésével azonban a numerikus áramlástan a tervezés és az optimalizálás folyamatában is egyre nagyobb szerepet kapott, hiszen a fizikai valósággal ellentétben, a virtuális világban a geometria paraméterek egyszerűen módosíthatók. Ez jelentősen hozzájárul a mérnöki gyakorlatban alkalmazható optimalizációs algoritmusok terjedéséhez, melyek a költségcsökkentésen kívül kedvező hatással vannak a kapacitásra és a munkaidőre is. A számításokhoz szükséges idő – tekintettel a nagy számú paraméterre – azonban még a szuperszámítógépek alkalmazásával is a költséghatékonyság csökkenéséhez vezethet, ezért e munka elsődleges célja egy olyan számítási eljárás implementálása, mely segítségével javulás érhető el az explicit módszert alkalmazó numerikus áramlástani számítások területén.

NUMERIKUS MÓDSZER

A súrlódásmentes ideális áramlás feltételezésével élve a Navier-Stokes-egyenletek a viszkózus és a hővezetési tagok elhanyagolásával az Euler-egyenletekre vezethetők vissza, amelyek az áramlásban megjelenő diszkontinuitások – lökéshullámok, kontakt- és az örvényfelületek – kezelhetősége szempontjából a nem viszkózus áramlás legmagasabb fokú approximációját jelentik. Az Euler-egyenletek elsősorban a határrétegen kívüli és a nagy Reynolds-számú leválás nélküli összenyomható áramlás modellezésére alkalmasak. Mivel napjaink ipari-áramlástani folyamataiban lezajló folyamatokra a nagy Reynolds-szám jellemző, ezért ebből a szempontból az Euler-egyenletek alkalmazása áramló közegek modellezésére jó közelítésnek tűnik. A különféle numerikus módszerek tekintetében a viszkózus és a nem viszkózus áramlásmodellek esetén az elvégzendő műveletek száma ez utóbbi esetben a turbulencia modellek hiánya miatt kisebb, így a számításhoz szükséges gépidő is rövidebb. Másrészt, a legtöbb komplex 3D-s áramlás, a megfelelő szimmetria-feltételek, illetve közelítések figyelembevételével, visszavezethető 2D-s folyamatokra. Az Euler-egyenletek esetén pl. a határréteg és ezáltal a szekunder-áramlások modellezésének hiánya miatt például a 2, illetve a 3D-s eredmények közötti eltérés kisebb, mint a viszkózus áramlásmodellezések esetén. Mindezek figyelembevételével – elsősorban az előtervezési folyamatok lerövidítésének érdekében – a kisebb gépidő-igény jól kompenzálhatja a legnagyobb approximációs fokú 2D-s ideális áramlástani modellekben rejlő közelítést.

Az Euler egyenletek egy olyan nem lineáris parciális differenciálegyenlet rendszert foglalnak magukba, melynek komplexitásuk miatt, napjainkig nem létezik általános érvényű zárt alakú megoldása, ezért a különféle áramlástani-mérnöki problémák megoldása során hathatós segítséget nyújtanak az áramlástan numerikus módszerei. A különféle eljárások alkalmazásakor, a megfelelő pontosság biztosítása mellett, az alapegyenletekben szereplő áramlástani paraméterek a zárt alakú folytonos megoldás helyett, diszkrét értékekkel helyettesíthetők. Ezért, először a folytonos számítási tartomány véges számú diszkrét felosztását, a hálózást kell elvégezni. A háló pontjainak segítségével határozhatók meg az áramlástani paraméterek. A differenciál vagy integrál formában felírt alapegyenletek a diszkretizálást követően kerülnek a számítógép által jól kezelhető alakra. A lineáris vagy nem lineáris algebrai egyenletek azonban a kiinduló egyenletek meghatározott fokú approximációját is jelentik. A folytonosról diszkrét alakra történő átalakítás során, általában, egy adott pont körüli Taylor-sorba fejtés maradék tagjának segítségével állapítható meg a közelítés rendje. A hálóméret nullához tartása esetén a numerikus diszkretizáció hibájának is a zérushoz kell tartania, a sebessége, pedig arányos a diszkretizáció approximációjának rendjével. Az eredmények pontosságát a hálózás minősége, homogenitása is jelentős mértékben befolyásolja. A különféle diszkretizációs technikák három főbb csoportba oszthatók: a véges differenciák módszere, a véges elemek módszere és a véges térfogat módszere. Napjainkban a véges térfogat módszer a legelterjedtebb a numerikus áramlástan ipari alkalmazásaiban, mert magába foglalja a végeselemes módszer geometriai és a véges differenciák diszkretizálási flexibilitását mérsékelt memóriaigénnyel, ezért ebben a munkában is ezt a közelítést alkalmaztuk.

Alapegyenletek

A Navier-Stokes egyenletrendszerből a viszkózus és hővezetési tagok elhanyagolásával állítható elő az Euler-egyenlet rendszer, ami súrlódásmentes áramlást leíró legáltalánosabb differenciálegyenlet-rendszer. Ez az egyenletrendszer két dimenzióban, konzervatív alakban, időfüggő formában, tehetetlenségi erők és belső hőforrás nélkül, összenyomható áramlásra és a Descartes-féle koordináta rendszerben a következő formában írható fel [5],

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0\,, \tag{1}$$

ahol a konzervatív változók és a konvektív tagok vektora,

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix},\quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{pmatrix},\quad G(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{pmatrix}. \tag{2}$$

A torlóponti energia és entalpia a következő formában írható fel,

$$E = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2},\quad H = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2}\,. \tag{3}$$

A térbeli diszkretizációs módszer

A véges térfogatok módszere az alapegyenletek integrálása után megjelenő kifejezések diszkretizálásán alapszik. Az (1) egyenlet összevonását, integrálását és a Gauss–Osztrogradszkij tétel alkalmazását követően, a Γ -val határolt Ω tartomány felett a következő formában írható fel,

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Omega} U d\Omega + \int_{\Gamma} \vec{H}\vec{n} d\Gamma = 0\,. \tag{4}$$

A kontúrintegrált a $\vec{H}$ fluxusok felületelemre merőleges komponenseivel egyszerűbb meghatározni, mint a koordinátarendszer irányai szerinti összetevők segítségével, ezért ezt a közelítést alkalmaztuk. A teljes fluxus $\vec{n}$ irányba eső komponense a következő alakban írható fel,

$$H_n = \vec{H}\vec{n} = \begin{pmatrix} \rho V_n \\ \rho u V_n + p n_x \\ \rho v V_n + p n_y \\ \rho V_n H \end{pmatrix}, \tag{5}$$

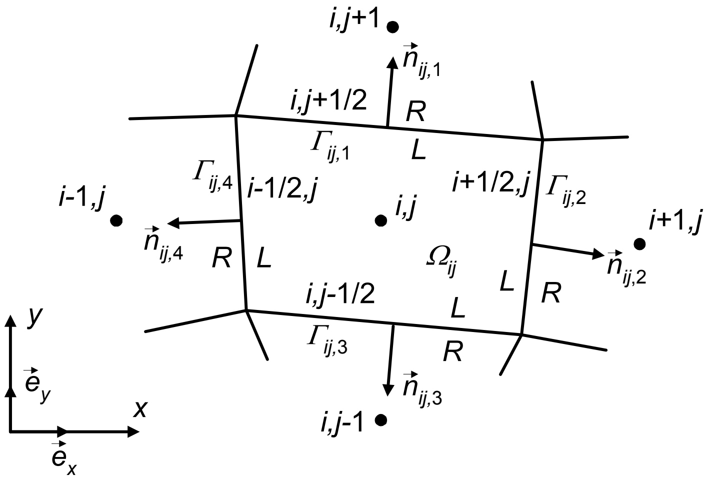
melyben V_n $\left(V_n = \vec{V}\vec{n} = \left(u\vec{e}_x + v\vec{e}_y\right)\left(n_x\vec{e}_x + n_y\vec{e}_y\right) = un_x + vn_y\right)$ a cellafalra normális irányú sebességkomponens. Ezek után (4) egyenlet a következő formát ölti,

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Omega} U d\Omega + \int_{\Gamma} H_n d\Gamma = 0\,. \tag{6}$$

A folytonosról a diszkrét alakra történő átalakítás során a véges térfogat feletti U megoldásfüggvény az U_j diszkrét ismeretlennel közelíthető,

$$U_j = \frac{1}{\Omega_j}\iint_{\Omega} U d\Omega\,, \tag{7}$$

amely a cella központú megközelítésnek felel meg. Ezért, az ismeretlen U megoldásvektor inkább értelmezhető az Ω ellenőrző felület feletti középértéknek, mintsem egy csomóponti függvényértéknek, amely a cella csomóponti közelítés jellemző paramétere. A Ω_j ellenőrző felület



1. ábra. Cella központú véges térfogat háló modell

N_f számú kontúrjára elvégzendő összeggel helyettesítve a (6) egyenletbeli második integrált, a következő j pont körüli szemi-diszkretizált differenciálegyenletre vezethető vissza,

$$\frac{\partial}{\partial t}U_j = -\frac{1}{\Omega_j}\sum_{k=1}^{N_f}\left[H_n\right]_{j,k}\Gamma_{j,k}\,, \tag{8}$$

amelyben $\left[H_n\right]_{j,k}$ az Ω_j ellenőrzőfelülethez tartozó, a j és k csomópontok között elhelyezkedő, a $\Gamma_{j,k}$ oldalhosszra jellemző konvektív fluxus (1. ábra) és az elkövetkezendőkben, mint numerikus fluxus függvény fog szerepelni. Előállítása alapvetően meghatározza a séma tulajdonságait.

Az áramlásirányú (un. upwind) módszerek esetén, az oszcillációs jelenségek elkerülése érdekében nincs szükség új egyenletbeli tagok hozzáadására, mivel a numerikus fluxusok az áramlás irányának, vagyis a karakterisztikus görbék meredekségének (a fizikai információterjedés irányának) megfelelően vannak szétválasztva. Legyenek az

$$U^L = U_{i,j} \text{ és}$$
$$U^R = U_{i+1,j} \tag{9}$$

(i,j), valamint a $(i+1,j)$ szomszédos cellákra jellemző konzervatív állapotjelzők, amelyeket az $(i+1/2,j)$ cellahatár választ el egymástól. Az $\vec{n}$ irányba levetített, a teljes fluxus konzervatív változók szerinti deriváltja, a C_n mátrix a következőképpen írható fel,

$$C_n = \frac{\partial H_n}{\partial U}\,. \tag{10}$$

Az áramlási irány szerint differenciált (upwind) sémák numerikus fluxus-függvényei a következőképpen definiálhatók,

$$\widetilde{H}_n\left(U^L,U^R\right) = H_n\left(U^L\right), \text{ha } \lambda^{(\alpha)} > 0 \text{ és} \tag{11}$$

$$\widetilde{H}_n\left(U^L,U^R\right) = H_n\left(U^R\right), \text{ha } \lambda^{(\alpha)} < 0\,, \tag{12}$$

amelyben $\lambda^{(\alpha)}$ a C_n mátrix sajátértéke. A fenti feltétel a hangsebesség feletti áramlás esetén azt a fizikai jelenséget modellezi, miszerint nincs információterjedés az áramlással ellentétes irányba. Tetszőleges, U^L és U^R paraméterek segítségével, egy hozzájuk közeli U^* referenciaállapottal a fluxus-függvény Taylor-sorba fejtése a következőképpen írható fel,

$$\widetilde{H}_n\left(U^L,U^R\right) = H_n\left(U^*\right) + C_n^+\left(U^*\right)\left(U^L - U^*\right) + C_n^-\left(U^*\right)\left(U^R - U^*\right) +$$

$$+O\left(\left(U^{L}-U^{*}\right)^{2},\left(U^{L}-U^{*}\right)\left(U^{R}-U^{*}\right),\left(U^{R}-U^{*}\right)^{2}\right). \tag{13}$$

Az egyenletben szereplő C_n^{+} és C_n^{-} mátrixok a jobb és bal oldali sajátérték mátrixok,

$$C_n^{+}=L^{-1}\Lambda^{+}L \text{ és} \tag{14}$$

$$C_n^{-}=L^{-1}\Lambda^{-}L\,, \tag{15}$$

valamint Λ_n^{+} pozitív és Λ_n^{-} negatív diagonális mátrixok segítségével állíthatók elő. A diagonális mátrixokban szereplő negatív, illetve a pozitív értékek helyére zérust kell írni. Legyen U^{*} U^{L} és U^{R} aritmetikai középértéke, $\left(U^{L}+U^{R}\right)/2$. Ekkor a (8) numerikus fluxus-függvény az $i+1/2$ helyen a következő,

$$\tilde{H}_{n_{i+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\left[H_n\left(U_i\right)+H_n\left(U_{i+1}\right)-\left|C_n\left(\frac{U_i+U_{i+1}}{2}\right)\right|\left(U_{i+1}-U_i\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[H_n\left(U_i\right)+H_n\left(U_{i+1}\right)-\delta H_{n_{i+\frac{1}{2}}}\right]. \tag{16}$$

A δH_n tagnak ki kell elégítenie a kozisztenciát, vagyis,

$$\delta H_n\left(U,U\right)=0\,. \tag{17}$$

δH_n lényegében egy mesterséges disszipációs tag, amely a centrális diszkretizáció stabilizálására szolgál. Az upwind jellegű sémák többségében, a közöttük lévő különbség a δH_n tag különféle, precíz meghatározásában rejlik. A jelen munkában Roe [6] által közelített fluxus-különbség megosztáson alapuló módszert alkalmaztuk, mert ez tekinthető az egyik legkevésbé disszipatív eljárásnak (numerikusan) és a legközelebb áll a karakterisztikus transzportjelenségek elméletéhez. Az eljárás a fluxus különbségek karakterisztikus mező dekompozícióján alapszik. Ez az egyik leginkább alkalmazható Riemann megoldó az áramlásban megjelenő szakadások pontos modellezésre (pl. lökéshullámok, nyírás).

A (2)-ben szereplő nem viszkózus fluxusok a konzervatív változók elsőfokú függvényei, ami azt jelenti, hogy,

$$F(\beta U)=\beta F(U)\,,\ \forall\ \beta\in\boldsymbol{R}\,. \tag{18}$$

Képezzük a (18) egyenlet β szerinti deriváltját $\beta=1$ helyen,

$$\left.\frac{\partial F\left(\beta U\right)}{\partial\beta}\right|_{\beta=1}=F=\frac{\partial F}{\partial\left(\beta U\right)}\cdot\frac{\partial\left(\beta U\right)}{\partial\beta}=AU\,. \tag{19}$$

A (19) egyenlet alapján, valamint felhasználva, hogy a C_n mátrix a H_n eredő fluxus konzervatív változók vektora szerinti differenciálásával állítható elő, a H_n fluxus formálisan a következőképpen írható fel,

$$H_n = \frac{\partial H_n}{\partial U} U = C_n U = R_n \Lambda_n L_n U \, , \tag{20}$$

amelyben Λ_n C_n mátrix sajátértékeinek diagonál mátrixa: $\Lambda_n = Diag\left(\lambda_n^{(\alpha)}\right)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ két dimenzióban: $\lambda_n^{(1)} = V_n$, $\lambda_n^{(2)} = V_n$, $\lambda_n^{(3)} = V_n + c$, $\lambda_n^{(4)} = V_n - c$ $\left(c = \sqrt{\gamma RT}\right.$ a hangsebesség), valamint R_n és L_n a jobb és bal oldali sajátvektor mátrixok $\left(R_n = L_n^{-1}\right)$.

Az információterjedés irányának megfelelően, a Λ_n mátrix elemeinek előjele szerint egy pozitív és egy negatív mátrixra bontható fel, mialatt a negatív és pozitív elemek helyére zérus kerül. Ezzel a megosztással az eredő fluxus a következőképpen írható fel,

$$H_n = R_n\left(\Lambda_n^+ + \Lambda_n^-\right)L_n U = \left(C_n^+ + C_n^-\right)U = H_n^+ + H_n^- \, . \tag{21}$$

Az előzőek értelmében, a cellahatáron megjelenő fluxus-függvény a bal és a jobb oldali állapotoknak megfelelően alakul,

$$\widetilde{H}_n\left(U^L, U^R\right) = H_n^+\left(U^L\right) + H_n^-\left(U^R\right), \tag{22}$$

vagy

$$\widetilde{H}_n\left(U^L, U^R\right) = H_n\left(U^R\right) - H_n^+\left(U^R\right) + H_n^+\left(U^L\right) = H_n\left(U^R\right) - \int_{U_L}^{U_R} C_n^+(U)\,dU \, . \tag{23}$$

Másrészt szintén felírható, hogy

$$\widetilde{H}_n\left(U^L, U^R\right) = H_n\left(U^L\right) - H_n^-\left(U^L\right) + H_n^-\left(U^R\right) = H_n\left(U^L\right) + \int_{U_L}^{U_R} C_n^-(U)\,dU \, . \tag{24}$$

A megoldás azon a lineáris hullám-dekompozíció elven alapul, amelynek során a jobb és a bal oldalnak létezik egy speciálisan átlagolt állapota (kalappal jelölve), amelyet Roe paramétervektornak neveznek. Az integrálás elvégzését követően az előző két egyenlet segítségével a következő összefüggés adódik,

$$\widetilde{H}_n\left(U^L, U^R\right) = \frac{1}{2}\left\{H_n\left(U^L\right) + H_n\left(U^R\right) - \left|\hat{C}_n\left(U^L, U^R\right)\right|\left(U^R - U^L\right)\right\}. \tag{25}$$

A $\hat{C}_n\left(U^L, U^R\right)$ mátrix a következő speciális tulajdonságokkal rendelkezik,

1. Valós értékű sajátvektorai és lineárisan független sajátvektorai vannak.

2. Ha $U^L = U^R = U$, akkor $\hat{C}_n\left(U^L, U^R\right) = \hat{C}_n(U)$.

3. $H_n\left(U^R\right) - H_n\left(U^L\right) = \hat{C}_n\left(U^L, U^R\right)\left(U^L - U^R\right)$.

Az első feltétel a hiperbolikus típusú egyenletek jellemző tulajdonsága, a második a konzisztencia. A harmadik feltétel biztosítja, hogy nyugvó lökéshullámok esetén, amikor $H_n\left(U^R\right) = H_n\left(U^L\right)$, a (25) numerikus fluxus-függvény a fizikailag releváns $1/2\left[H_n\left(U^R\right) + H_n\left(U^L\right)\right]$ fluxussá alakuljon. Más szóval ez azt jelenti, hogy a séma képes legyen a diszkontinuitás megoldására egy cellán belül, ha a szakadás hálóirányú [5]. A (25) egyenletbeli $\left|\hat{C}_n\left(U^L, U^R\right)\right|\Delta U$ vektor a jobb oldali sajátvektorok mátrixának, a karakterisztikus változók vektorának és a sajátérték mátrixnak lineáris kombinációjával állítható elő,

$$\left|\hat{C}_n\right|\Delta U = \left|\hat{C}_n\right|\hat{R}_n\Delta W_n = \hat{R}_n\hat{L}_n\left|\hat{C}_n\right|\hat{R}_n\Delta W_n = \hat{R}_n\left|\hat{\Lambda}_n\right|\Delta W_n = \sum_{i=1}^{4}\left|\hat{\lambda}_n^{(i)}\right|\hat{r}_n^{(i)}\Delta W_n^{(i)}, \tag{26}$$

amelyben $\hat{R}_n$ jobb oldali sajátvektor mátrix $\hat{r}_n^{(i)}$ oszlopvektorok, a ΔW_n vektor pedig a $\Delta W_n^{(i)}$ karakterisztikus változók segítségével állítható elő. Roe megmutatta, hogy ideális gázok esetén $\hat{C}_n$ mátrix abban az esetben egyezik meg C_n Jacobi-mátrixszal ha $\hat{C}_n$ felírható $\hat{\rho}$, $\hat{u}$, $\hat{v}$, és $\hat{H}$ változók olyan függvényeként, amelyek a sűrűség négyzetgyökével átlagolt paraméterek formájában írható fel,

$$\hat{\rho} = \rho^L\chi,\ \hat{u} = \frac{u^R\chi + u^L}{1+\chi},\ \hat{v} = \frac{v^R\chi + v^L}{1+\chi},\ \text{illetve}\ \hat{H} = \frac{\hat{H}^R\chi + \hat{H}^L}{1+\chi}, \tag{27}$$

ahol $\chi = \sqrt{\rho^R/\rho^L}$, amihez a számítástechnikailag leggazdaságosabb egy négyzetgyökszámítás szükséges. A hangsebesség az előbbi paraméterek segítségével szintén kifejezhető,

$$\hat{c} = \sqrt{(\gamma - 1)\left\{\hat{H} - \frac{\left(\hat{u}^2 + \hat{v}^2\right)}{2}\right\}}. \tag{28}$$

Ezek után Roe fluxus-függvénye a következőképpen alakul,

$$\tilde{H}_n\left(U^L, U^R\right) = \frac{1}{2}\left\{H_n\left(U^L\right) + H_n\left(U^R\right) - \sum_{i=1}^{4}\left|\lambda_n^{(i)}\right|\hat{r}_n^{(i)}\Delta W_n^{(i)}\right\}, \tag{29}$$

amelyben a jobb oldali sajátvektor mátrix,

$$\hat{R}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\hat{\rho}}{2\hat{c}} & \frac{\hat{\rho}}{2\hat{c}} \\ \hat{u} & \hat{\rho} n_y & \frac{\hat{\rho}}{2\hat{c}}(\hat{u}+\hat{c}n_x) & \frac{\hat{\rho}}{2\hat{c}}(\hat{u}-\hat{c}n_x) \\ \hat{v} & -\hat{\rho} n_x & \frac{\hat{\rho}}{2\hat{c}}(\hat{v}+\hat{c}n_y) & \frac{\hat{\rho}}{2\hat{c}}(\hat{v}-\hat{c}n_y) \\ \alpha & \hat{\rho}(\hat{u}n_y-\hat{v}n_x) & \frac{\hat{\rho}}{2\hat{c}}\left(\alpha+\frac{\hat{c}^2}{\gamma-1}+\hat{c}V_n\right) & \frac{\hat{\rho}}{2\hat{c}}\left(\alpha+\frac{\hat{c}^2}{\gamma-1}-\hat{c}V_n\right) \end{pmatrix}, \tag{30}$$

ahol $\hat{\vec{V}} = \hat{u}\vec{e}_x + \hat{v}\vec{e}_y$, $\alpha = \left|\hat{\vec{V}}\right|^2 / 2 = (\hat{u}^2 + \hat{v}^2)/2$, és $\hat{V}_n = \hat{\vec{V}}\vec{n} = (\hat{u}\vec{e}_x + \hat{v}\vec{e}_y)\cdot(n_x\vec{e}_x + n_y\vec{e}_y) =$ $= \hat{u}n_x + \hat{v}n_y$. $\hat{r}_n^i$ oszlop vektorok $\hat{R}_n$ mátrix oszlop elemei ($i = 1$, 2, 3, 4 balról jobbra). A karakterisztikus vektor elemei a következőképpen írhatók fel,

$$\Delta W_n = \begin{pmatrix} \Delta W_n^{(1)} \\ \Delta W_n^{(2)} \\ \Delta W_n^{(3)} \\ \Delta W_n^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\rho - \frac{1}{\hat{c}^2}\Delta p \\ \vec{s}\Delta V \\ +\vec{n}\Delta\vec{V} + \frac{1}{\hat{\rho}\hat{c}}\Delta p \\ -\vec{n}\Delta\vec{V} + \frac{1}{\hat{\rho}\hat{c}}\Delta p \end{pmatrix}, \tag{31}$$

amelyben $\vec{s} = n_y\vec{e}_x - n_x\vec{e}_y$ $\vec{n}$-ral jobbrendszert alkotó, rá merőleges egységvektor, a Δ-val jelölt paraméterek jelentése: $\Delta\phi = \phi^R - \phi^L$. Végezetül a $\hat{\Lambda}_n$ sajátérték mátrix kifejtve következőképpen néz ki,

$$\hat{\Lambda}_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \hat{\vec{V}}\vec{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\vec{V}}\vec{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\vec{V}}\vec{n} + \hat{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\vec{V}}\vec{n} - \hat{c}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_n^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_n^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}_n^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_n^{(4)} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

A numerikus eljárást azonban célszerű kibővíteni az un. entrópia feltétellel, hogy elkerülhetők legyenek az olyan nem fizikai megoldások, mint például az expanziós hullámok. Az entrópia korrekció lényegében egy hozzáadott numerikus disszipációt jelent, azokban a kritikus esetekben, amikor a sajátérték előjelet vált (pl. lökéshullám, hangsebesség). A munkában alkalmazott módszer Yee (1989) által javasolt eljáráson alapszik, amelyben a sajátértékek $\lambda_n^{(1)}$- től $\lambda_n^{(4)}$-ig egy un. entrópia-fix függvény segítségével állíthatók elő [8],

$$\Delta\left|\lambda_n^{(i)}\right| = \psi\left(\lambda_n^{(i)}\right), \tag{33}$$

ahol a ψ függvény:

$$\psi(z)=\begin{cases}|z|, & ha\ \dfrac{|z|}{\hat{c}}\geq\delta,\\ \dfrac{\hat{c}}{2\delta}\left(\dfrac{z^2}{\hat{c}^2}+\delta^2\right), & ha\ \dfrac{|z|}{\hat{c}}<\delta,\end{cases} \tag{34}$$

valamint

$$\delta=\delta_0\left(\frac{|\hat{u}|+|\hat{v}|}{\hat{c}}+1\right), \tag{35}$$

amelyben δ_0 állandó, értéke 0,025.

Roe által közelített fluxus-különbség megosztásán alapuló módszer elsőrendű. A séma pontosítása a magasabb rendű térbeli diszkretizáció bevezetésével érhető el.

A diszkretizáció pontosságának rendje az U^L és U^R állapotok megfelelő függvénykapcsolatának figyelembevételével határozható meg a numerikus fluxusok előállítása során. Mint ahogyan már korábban volt róla szó, az első rendű sémák esetében az ellenőrző felület felett állandó értékkel szerepelnek a paraméterek,

$$U^L_{i+1/2,j}=U_{i,j} \text{ és } U^R_{i+1/2,j}=U_{i+1,j}, \tag{36}$$

az $(i+1/2\,,\ j)$ cellahatáron az $(i\,,\ j)$, illetve az $(i+1\,,\ j)$ véges térfogat elemek között. A magasabb rendű approximáció érdekében az állandó paraméterek lineárisan változó, másod-, vagy magasabb rendűekkel cserélendők fel. Ennek értelmében felírható $U(x)$ megoldás függvény U_i pont körüli Taylor sora (folytonos függvények esetén),

$$U(x)=U_i+\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x_i}(x-x_i)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_{x_i}(x-x_i)^2+O\left(\Delta x^3\right), \tag{37}$$

továbbá legyen,

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x_i}=\frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2\Delta x}+O\left(\Delta x^2\right)=\frac{\delta_i U}{\Delta x}+O\left(\Delta x^2\right) \text{ és} \tag{38}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_{x_i}=\frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}}{2\Delta x^2}+O\left(\Delta x^2\right)=\frac{\delta_i^2 U}{\Delta x^2}+O\left(\Delta x^2\right). \tag{39}$$

A (38) és a (39) egyenletek segítségével a (37) egyenlet a következőképpen írható fel,

$$U(x)=U_i+\frac{\delta_i U}{\Delta x}(x-x_i)+\frac{\delta_i^2 U}{2\Delta x^2}(x-x_i)^2+O\left(\Delta x^3\right), \tag{40}$$

amely az $x \in \left[x_i - (1/2)\Delta x, x_i + (1/2)\Delta x\right]$ tartományban érvényes. A cellaközpontú eljárás során az állapotváltozók az ellenőrzőfelület feletti átlagolt paraméterek formájában kerülnek meghatározásra, vagyis,

$$\overline{U}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i - \frac{1}{2}\Delta x}^{x_i + \frac{1}{2}\Delta x} U(x) dx . \tag{41}$$

A (40) egyenlet a (41) egyenletbe való behelyettesítése, és az integrálás elvégzése után a következő összefüggés adódik,

$$\overline{U}_i = U_i + \frac{\delta_i^2 U}{24} + O\left(\Delta x^3\right). \tag{42}$$

A (42) egyenlet (40) egyenletbe való visszahelyettesítése után, pedig felírható, hogy,

$$U(x) = \overline{U}_i + \frac{\delta_i \overline{U}}{\Delta x}\left(x - x_i\right) + \frac{\delta_i^2 \overline{U}}{2\Delta x^2}\left[\left(x - x_i\right)^2 - \frac{\Delta x^2}{12}\right] + O\left(\Delta x^3\right). \tag{43}$$

Az egyszerű kezelhetőség érdekében érdemes beszorozni a szögletes zárójelben lévő tagot 3κ paraméterrel. Ennek értelmében, $\kappa = 1/3$ esetén a (43) egyenlet harmadrendűen pontos és másodfokú közelítést jelent $U(x)$ térbeli diszkretizációjára nézve. Ha azonban $\kappa \neq 1/3$, de $-1 \leq \kappa \leq 1$, akkor a (43) egyenlet lineáris, a levágási hiba nagysága κ értékétől függően különböző lehet, ami az approximáció rendjét a legtöbb esetben másodrendűre csökkenti. A többdimenziós problémák esetén az ismeretlen paraméterek vektorának lineáris vagy másodfokú előállítását minden egyes cellahatár normális irányába el kell végezni. A numerikus fluxus-függvényre csak a cellahatáron van szükség, ezért az $x = x_i \pm \Delta x/2$ (uniformis hálózás feltételezésével), illetve az $\overline{U} = U$ helyettesítéssel a (43) egyenlet a következőképpen írható fel,

$$\overline{U}^R_{i+\frac{1}{2}} = U_{i+1} - \frac{1}{4}\left[(1-\kappa)\Delta_{i+\frac{3}{2}} + (1+\kappa)\Delta_{i+\frac{1}{2}}\right] \text{ és} \tag{44}$$

$$\overline{U}^L_{i+\frac{1}{2}} = U_i + \frac{1}{4}\left[(1-\kappa)\Delta_{i-\frac{1}{2}} + (1+\kappa)\Delta_{i+\frac{1}{2}}\right], \tag{45}$$

amelyben az $\overline{U}^R_{i+\frac{1}{2}}$ és $\overline{U}^L_{i+\frac{1}{2}}$ paraméterek az $(i,\ j)$ és az $(i+1,\ j)$ cellák között elhelyezkedő $(i+1/2,\ j)$ cellahatár jobb és bal oldalán megjelenő értékeket jelentik, továbbá $\Delta_{i+\frac{3}{2}} = U_{i+2} - U_{i+1}$,

$\Delta_{i+\frac{1}{2}} = U_{i+1} - U_i$ és $\Delta_{i-\frac{1}{2}} = U_i - U_{i-1}$. A (44) és a (45) kifejezések a magasabb rendű sémák egy általános alakja, amelyet gyakran neveznek a másodrendű sémák κ osztályának. Az egyoldalú másodrendű diszkretizálás a $\kappa = -1$, a Fromm séma $\kappa = 0$, a harmadrendűen pontos (upwind) diszkretizáció $\kappa = 1/3$, a Leonard séma $\kappa = 1/2$, és a három pontos centrális differencia séma $\kappa = 1$ esetén áll elő. Sajnos azonban a magasabb rendű upwind eljárások esetén, hasonlóan a centrális sémákhoz, hamis oszcillációk jelennek meg a lökéshullámok közelében, amelyekért a numerikus diszkretizáció egyenértékű egyenletében megjelenő páratlan rendű deriváltak tehetők felelőssé (a párosak okozzák a numerikus disszipációt). A nem oszcilláló megoldások érdekében komplexebb módszereket kellett bevezetni. Két nagy osztálya létezik az ilyen jellegű eljárásoknak; az ENO (Essentially Non-Oscillatory), illetve a TVD (Total Variation Diminishing) sémák. Mivel igen pontosan, oszcilláció-mentesen képesek modellezni az áramlást a szakadás környezetében, valamint legalább másodrendűen pontosak azon kívül, ezért gyakran nevezik nagy megoldó-képességű módszereknek (high resolution methods). Az ENO sémák esetében a magasabb rendű kiterjesztés miatt nem mindig biztosítható az oszcilláció-mentesség, ezért ebben a munkában a TVD-n alapuló eljárásokat részesítettem előnyben. Az U^n paraméter teljes változása (total variation) a következőképpen írható fel,

$$TV\left(U^n\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left| U_{i+1}^n - U_i^n \right|. \tag{46}$$

A módszer akkor TVD, ha

$$TV\left(U^{n+1}\right) \leq TV\left(U^n\right), \tag{47}$$

ami lényegében azt jelenti, hogy nem alakul ki lokális szélsőérték a megoldásban. A monotonitás tulajdonság a TVD-nél erősebb feltétel az oszcilláció-mentesség szempontjából. A TVD, a monotonitás, a pozitivitás tulajdonságokról bővebb információ a [5] irodalomban található.

A másod, illetve magasabb rendű térbeli approximációk esetén megfelelő korlátok között kell tartani a jobb és bal oldali konzervatív változók gradiensét, hogy ne szűnjön meg a megoldás monotonitása. Ezért a MUSCL módszerek esetén nemlineáris függvényeket, úgynevezett limitereket kell alkalmazni. A legelterjedtebben használt limiterek a Van Albada, a Mulder és a MinMod. Ez utóbbi esetében az extrapolációs eljárás a következőképpen módosul [5],

$$\overline{U}_{i+\frac{1}{2}}^{L} = U_i + \frac{1}{4}\left[(1+\kappa)\overline{\Delta}_{i+\frac{1}{2}} + (1-\kappa)\overline{\Delta}_{i-\frac{1}{2}} \right] \text{ és} \tag{48}$$

$$\overline{U}^{R}_{i-\frac{1}{2}} = U_i - \frac{1}{4}\left[(1-\kappa)\overline{\Delta}_{i+\frac{1}{2}} + (1+\kappa)\overline{\Delta}_{i-\frac{1}{2}}\right], \tag{49}$$

ahol,

$$\overline{\Delta}_{i+\frac{1}{2}} = MinMod\left(\Delta_{i+\frac{1}{2}}, \beta\Delta_{i-\frac{1}{2}}\right) \text{ és } \overline{\Delta}_{i-\frac{1}{2}} = MinMod\left(\Delta_{i-\frac{1}{2}}, \beta\Delta_{i+\frac{1}{2}}\right) \tag{50}$$

és amelyben a MinMod függvény a következőképpen számítható ki:

$$MinMod(x,y) = sgn(x)\,max\left[0, min\left(x\,sgn(y), y\,sgn(x)\right)\right]. \tag{51}$$

β a kompressziós paraméter: $1 \le \beta \le \dfrac{3-\kappa}{1-\kappa}$, amelyet a validációs eljárás során $1/3$ értékkel vettük figyelembe.

A (48), illetve a (49) egyenletekben szereplő magasabb rendű interpolációs függvények különböző típusú változókkal számíthatók ki; a konzervatív, a primitív, illetve a karakterisztikus változók segítségével. Az 1D-s áramlások tekintetében a karakterisztikus változók egyértelmű előnyt élveznek a primitív és a konzervatív változókkal szemben. Ennek oka, hogy a Riemann invariánsok közül csak az egyik változik meg kismértékben a lökéshullámon, illetve a kontakt-felületen keresztül, ellenben a konzervatív vagy primitív változós esetekben, ahol a paraméterek változása jelentős [5]. 2, illetve 3D-s esetekben szintén a karakterisztikus változók jelentik a legkonzisztensebb közelítést. A számítás gyorsaságának tekintetében azonban a primitív változók előnyt élveznek a konzervatív és a karakterisztikus változókkal szemben, ugyanis ebben az esetben elkerülhető a különböző típusú változók közötti transzformáció. Manna [5] és mások által végzett numerikus vizsgálatok arra engedtek következtetni, hogy a konzervatív változók használata esetén csökkent a konvergencia sebessége, továbbá némely paraméter esetében oszcillációk jelentek meg a szakadások közelében. Ezekből, illetve előzetes összehasonlító elemzésekből következően, a primitív változókat ($U = (\rho, u, v, p)$) alkalmaztam az interpolációs függvények meghatározásra.

Az időbeli diszkretizációs módszer

Az előző alfejezetekben ismertetett térbeli diszkretizációs módszer során jutottunk el a megmaradási egyenletek a szemi-diszkretizált alakjáig ((8) egyenlet),

$$\frac{\partial}{\partial t} U_j = \Re_j^n, \tag{52}$$

amelyben $\Re_j^n$ egy tetszőleges *j* pontbeli *n* időpillanathoz tartozó reziduumot, vagyis a (6) egyenletbeli kontúrintegrál numerikus megfelelőjét jelenti. A közönséges elsőrendű differenciálegyenlet rendszer egyaránt megoldható implicit (pl. Newton linearizáció, relaxáció módszerek) és explicit (pl. haladó

Euler, negyedrendű Runge–Kutta-módszerek) integrálás segítségével. Az implicit módszerek nagy előnye a feltétel nélküli stabilitás. Az explicit időintegrálás esetén jelentkező feltételes stabilitás miatt maximálni kell a megengedhető legnagyobb Δt időlépés értékét. Az időben beállt folyamatok modellezése esetén a végső cél az $\Re$ reziduum zérus értékre történő beállítása olyan gyorsan amilyen gyorsan lehetséges. Az iterációk során az időben pontos tranziens fizikai jelenségek nem fontosak, a számítási eljárás lényegében egy numerikus szállítóeszköznek tekinthető, amely a megoldást az időben beállt folyamat irányába viszi. Ebből a szempontból az implicit módszerek használata a legalkalmasabb, megfelelő korlátozással célszerűen nagyra választva az időlépést. A megfelelő korlátozás a nemlinearitások miatti oszcillációs jelenség megszüntetése érdekében szükséges időlépést jelenti. Az explicit módszerek szintén alkalmasak az időben beállt folyamatok modellezésére a stabilitási feltételnek megfelelő, a maximálisan megengedhető időlépés korlátozásával. Az időben változó, tranziens folyamatok modellezésére az explicit módszerek alkalmasak, azonban a számítási idő csökkentése érdekében az implicit módszerek nagyobb hatásfokkal használhatók a fizikai szempontból megfelelően megválasztott időlépés figyelembevételével. A számítógépi kapacitás, a memóriafoglalás, az iterációs idő és a programozhatóság szempontjából az explicit módszerek előnyt élveznek. Az implicit módszerek esetén a háló csomópontjainak maximális száma, az esetlegesen előálló mátrixműveletek elvégezhetősége miatt korlátozva van, ami a komplex háromdimenziós (esetleg DNS (Direkt Numerikus Szimuláció)) számításokra jelenthet korlátot. Elsősorban a kisebb számítógépi kapacitás igény miatt a jelen esetben explicit időintegrálást alkalmaztunk.

Megfelelő megkötések mellett többféle stabil explicit módszer létezik (pl. Haladó Euler, Explicit McCormack prediktor-korrektor, Runge-Kutta-módszerek) az olyan közönséges elsőrendű differenciálegyenletek megoldására, mint például a (8) egyenlet,

$$\frac{\partial}{\partial t} U_j = -\frac{1}{\Omega_j} \sum_{k=1}^{N_f} \left[H_n \right]_{j,k} \Gamma_{j,k} = \Re\left(U_j , U_k \right). \tag{53}$$

A lehető legkisebb számítógépi kapacitás, illetve az α_k paraméter optimális megválasztása esetén elérhető széles stabilitási intervallum elérésének érdekében a negyedrendű nemlineáris Runge-Kutta módszert alkalmaztuk, amely a következőképpen írható fel,

$$\begin{aligned} U^0 &= U^n \\ U^k &= U^0 + \alpha_k \Delta t \Re\left(U^{k-1} \right) \qquad k = 1,\ \dots,\ 4\,. \\ U^{n+1} &= U^m \end{aligned} \tag{54}$$

Az eljárás stabilitásvizsgálata nem célja a munkának, erről a szakirodalomban elégséges információ áll rendelkezésre [5]. Általában, az időben negyedrendű pontosság elérése érdekében az α_k paraméter a következőképpen állítható elő,

$$\alpha_k = \frac{1}{4-k+1}. \tag{55}$$

A stabilitási tartomány valós tengely menti legnagyobb kiterjedtsége érdekében az upwind típusú diszkretizációk α_k paraméterének meghatározása oly módon történik, hogy maximálja a Courant vagy CFL (Courant-Friedrichs-Levy) számot,

$$\alpha_1 = 0{,}12\,,\ \alpha_2 = 0{,}25\,,\ \alpha_3 = 0{,}5 \text{ és } \alpha_4 = 1\,.$$

A számítási idő további csökkentése érdekében a cellára érvényes, maximálisan előírható időlépést alkalmaztuk,

$$\Delta t_{i,j} = \frac{\Omega_{i,j} CFL}{\lambda_{i,j,k} + \mu_{i,j,k}}, \tag{56}$$

melyben a $\lambda_{i,j,k} + \mu_{i,j,k}$ a spektrális sugár $i,j \rightarrow k$ irányban,

$$\lambda_{i,j,k} + \mu_{i,j,k} = \frac{1}{2} \sum_{\text{összes cellafal}} \left(|V_n| + c \right)_{cellafal} \Gamma_{i,j,k}\,. \tag{57}$$

Peremfeltételek

A fizikai és numerikus peremfeltétek a karakterisztikák módszerének segítségével határoztuk meg. Ha egy hullám által szállított információ a számítási tér felől érkezve éri el a cellahatárt (negatív meredekségű (lásd 2. ábra)), a megfelelő változó ennek az információnak a segítségével állítható elő. Ha a karakterisztikus görbe a számítási téren kívülről érkezik, akkor egy fizikai paramétert kell előírni a peremen. Hangsebesség alatti belépő perem esetén három bejövő és egy kimenő karakterisztikus görbe éri el a cellahatárt, mint ahogy az a 2. ábrán látható. Ezért három paramétert, a torlóponti nyomást p^{to}, a torlóponti hőmérsékletet T^{to} és a belépő áramlás irányát α írtuk elő, mint fizikai peremfeltételeket. A

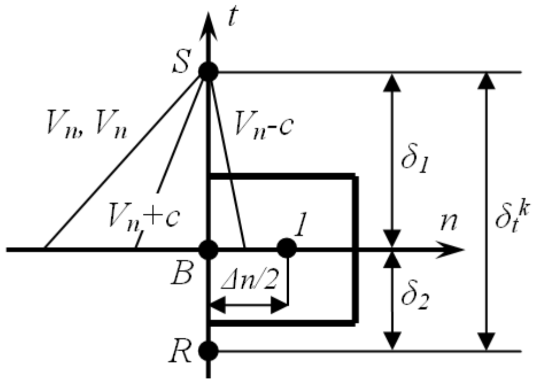
$$\begin{pmatrix} \partial W_n^{(1)} \\ \partial W_n^{(2)} \\ \partial W_n^{(3)} \\ \partial W_n^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial p - c^2 \partial \rho = 0, \text{ on the curve } dn/dt = V_n \\ \partial V_s = 0, \text{ on the curve } dn/dt = V_n \\ \partial p + \rho c \partial V_n = 0, \text{ on the curve } dn/dt = V_n + c \\ \partial p - \rho c \partial V_n = 0, \text{ on the curve } dn/dt = V_n - c \end{pmatrix} \tag{58}$$

karakterisztikák módszerének megfelelően, a problémát a cellahatárra merőleges és arra párhuzamos irányokban felírva csak $dn/dt = V_n - c$ görbe rendelkezik negatív meredekséggel, ezért a $\partial W_n^{(4)}$ -hez (58) [3] tartozó karakterisztikus egyenletet alkalmaztuk teljes differenciál formában (59).

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}-\rho c\frac{\partial V_n}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial n}-\rho c\frac{\partial V_n}{\partial n}\right)(V_n-c)=0 \tag{59}$$

A (60) az (59) egyenlet diszkretizált alakját mutatja be, melynek a sémája a 2. ábrán látható. A V_x a cellahatárra normális sebesség komponens értékét jelenti a továbbiakban.

$$\frac{p_S-p_R}{\delta_t^k}-\rho_R c_R\frac{V_S-V_R}{\delta_t^k}+\left(\frac{p_S\delta_2+p_R\delta_1-p_1}{\Delta n/2}-\rho_R c_R\frac{V_S\delta_2+V_R\delta-V_1}{\Delta n/2}\right)(V_R-c_R)=0\,. \tag{60}$$



2. ábra. A bejövő és kimenő karakterisztikus görbék sémája a diszkretizált egyenletek értelmezéséhez (1. pont: cella középpont (a fal felületére extrapolálva); *R, B, S* pontok: paraméterek a peremen az előző, az aktuális és a következő időlépésben)

A hiányzó paraméter meghatározása az energia- és a Poisson egyenlet segítségével történt,

$$\left(\frac{p}{p^{to}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=1-\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{\rho^{to}}{p^{to}}V_n^2\left(1+tg^2\alpha\right). \tag{61}$$

A (60) és (61) egyenletrendszer a $p=p_s$ és a $V_n=V_s$ paraméterekre a Newton-Raphson eljárás segítségével oldottuk meg az új, *S* időlépésre. A hőmérséklet, a sűrűség és a sebességvektor komponensei a Poisson egyenlet, az ideális gáztörvény és az áramlás ismert irányának segítségével határozhatók meg, ha feltételezzük, hogy cellahatárral párhuzamos sebességkomponens nem változik.

A kilépő peremfeltételek fizikai és numerikus peremfeltételeinek száma és a konkrét számértékek szintén a karakterisztikák módszerének segítségével határozhatók meg. Ebben az esetben két kimenő és egy bejövő karakterisztikus görbe jelenik meg, azért egy, a kilépő statikus nyomás írható elő, mint fizikai peremfeltétel. A hiányzó peremfeltételek meghatározására a $\partial W_n^{(1)}$ és a $\partial W_n^{(3)}$ karakterisztikus változókhoz tartozó egyenleteket alkalmaztuk (58), melyek diszkretizált formában a következők,

$$p_S - c_R^2 \rho_S = \frac{1}{1+2c_1\delta_2}\left[\left(1-2c_1\delta_1\right)\left(p_R - a_R^2\rho_R\right) + 2a_1\left(p_1 - a_R^2\rho_1\right)\right] \text{ és} \tag{62}$$

$$p_s + c_R\rho_R V_S = \frac{1}{1+2c_2\delta_2}\left(\left(1-2c_2\delta_1\right)\left(p_R + \rho_R c_R V_R\right) + 2a_2\left(p_1 + \rho_R c_R V_1\right)\right). \tag{63}$$

A nyomás ismeretében a fenti egyenletek a sűrűségre és a normális irányú sebességre megoldhatók meg. A tangenciális sebesség állandósága szintén további feltétele volt a hiányzó peremfeltételek meghatározásának.

A számítási idő csökkentése érdekében, egy új numerikus peremfeltétel számítási eljárást alkalmaztunk a [2] alapján a szilárd fal peremekre, amelynek használatával jelentősen csökkenthető az idő iterációk száma és a számítási idő. A rugalmas fal perem-feltétel lényege egy rugó-csillapító lengőrendszer, amely az idő iterációk során megengedi a falra merőleges nem zérusértékű sebesség-komponensek megjelenését, mialatt a hiperbolikus típusú problémákra jellemző zavarások a falon keresztül, visszaverődés nélkül távozhatnak a számítási térből.

A szilárd fal perem esetén a cellára merőleges sebesség zérus, ezért egy bejövő és egy kimenő karakterisztikus görbe értelmezhető. A $dn/dt = V_n + c$ görbéhez tartozó karakterisztikus egyenlet, mint numerikus peremfeltételt használtuk fel diszktretizált formában,

$$\left(\frac{p_S - p_R}{\delta_t^k} + \rho_R c_R \frac{V_S - V_R}{\delta_t^k}\right) + \left(\frac{p_S\delta_2 + p_R\delta_1 - p_1}{\Delta n/2} + \rho_R c_R \frac{V_S\delta_2 + V_R\delta_1 - V_1}{\Delta n/2}\right)\left(V_R + c_R\right) = 0. \tag{64}$$

A tömeg nélküli lengőrendszer reprezentálja az áteresztő falat [2],

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{V_n}{\tau} = \frac{\mu}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{65}$$

melyben $k = 1/\mu\tau$ a merevség és $\alpha = 1/\mu$ a csillapítási tényező. Az optimális paraméterkombináció a visszavert hullámok minimalizálására a következő: $\mu = 0.5$ és $\tau/\Delta t = 100$. Az egyenlet diszkretizált formája,

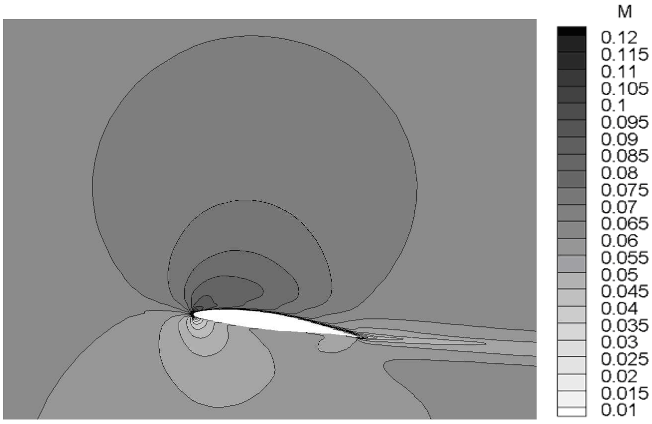
$$V_S - V_R + \frac{\delta_t^k}{2\tau}\left(V_S + V_R\right) = \frac{\mu}{\rho_R c_R}\left(p_S - p_R\right). \tag{66}$$

A (64) és a (66) egyenletek a peremen érvényes nyomásra p_S, és normális sebességre V_S oldhatók meg a következő időlépésre. A tangenciális sebesség szintén állandónak tekintendő. A hőmérséklet a Poisson egyenlet segítségével határozható meg, mivel a fal adiabatikusnak tekintendő az iterációk alatt.

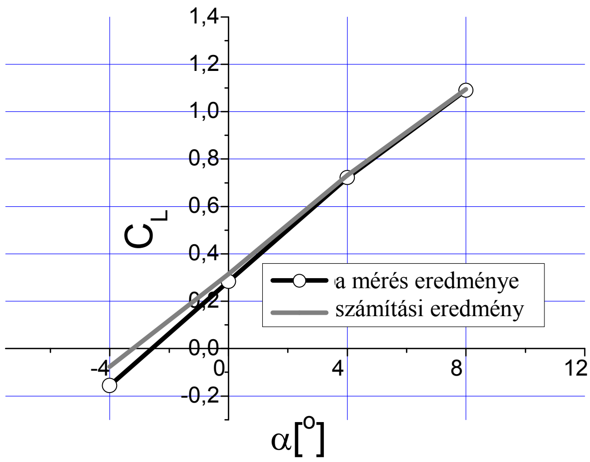
Validáció

A bemutatott eljárás matematikai szempontból kielégíti a konzisztenciára a konvergenciára és a stabilitásra vonatkozó feltételeket, ezt több publikáció is alátámasztja (pl. [7]). A gyakorlati alkalmazást tekintve azonban, célszerű megvizsgálni a program működésének helyességét, hogy milyen hatással vannak az eredményekre a korábban említett elhanyagolások, egyszerűsítések. Ezért a továbbiakban két méréssel összehasonlított tesztesetet mutatunk be; először egy NACA 65-410 szárnyprofil körüli áramlást, majd a profil segítségével kialakított lapátrácsban történő áramlást.

Abbott és munkatársai [1] jelentős számú mérést végeztek el a NACA 6 típusú profilok vizsgálatával kapcsolatban, többek között a felhajtóerő, az ellenállás és a nyomatéki tényező meghatározása céljából. A teszteket két dimenziós kis nyomású Langley szélcsatornában hajtották végre, melynek befoglaló mérete 0.9144 X 2.286 m és amelyben leggyakrabban 0.6 m húrhosszúságú profilokat mértek. A tesztmodellek teljes szélességben kitöltötték az áramlásra merőleges, a szárnydarab elhelyezkedésének megfelelő keresztmetszetet. A szélcsatornában elérhető maximális sebesség 70 m/s körül volt. A mérésről bővebb információ az [1]-ben található.



3. ábra. Mach szám eloszlás a NACA 65-410 profil körül $\alpha = 8^o$-s állásszögön és Re=1,4·10^6 esetén



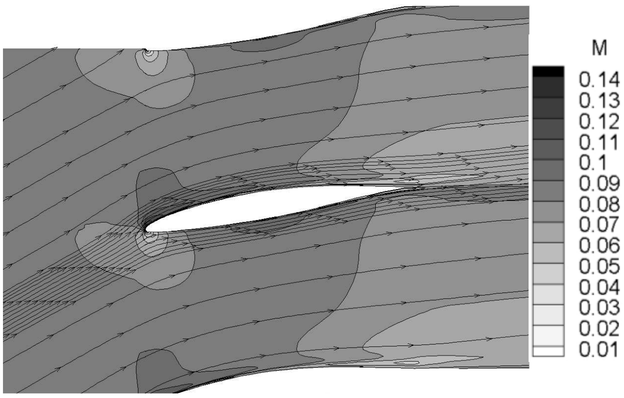
4. ábra. Felhajtóerő tényező az állás szög függvényében NACA 65-410 profil esetén (feket: mérés, szürke: számítási eredmény)

A számítási eredményeket tekintve, a profil körüli Mach szám eloszlás a 3. ábrán látható nyolc fokos állásszög esetén. Az $1{,}4 \cdot 10^6$ Reynolds számmal jelzett áramlás a következő peremfeltételek segítségével állítottuk elő: bementeti torlóponti nyomás: $p_{tot,in}$=101600 [Pa]; bemeneti torlóponti hőmérséklet: $T_{tot,in}$=293.15 [K]; statikus kimeneti nyomás: $p_{stat,out}$=101325 [Pa]. A háló mérete: 120×90. A számítási és mérési eredmények összehasonlításának érdekében a felhajtóerő tényező ábrázolása az állásszög függvényében a 4. ábrán látható. Mérnöki szempontból a módszer elfogadhatónak tekinthetők, mivel a mérés és a számítás eredményei közötti eltérés 10 százalék alatt van.

A második validációs teszt eset szintén NACA 65-410 profilon alapul. A segítségével létrehozott lapátrácsban a lapátosztás: $\sigma = 1.5$, a húrhossz: $c = 12.7$ cm és amelyekből a két profil közötti távolság,

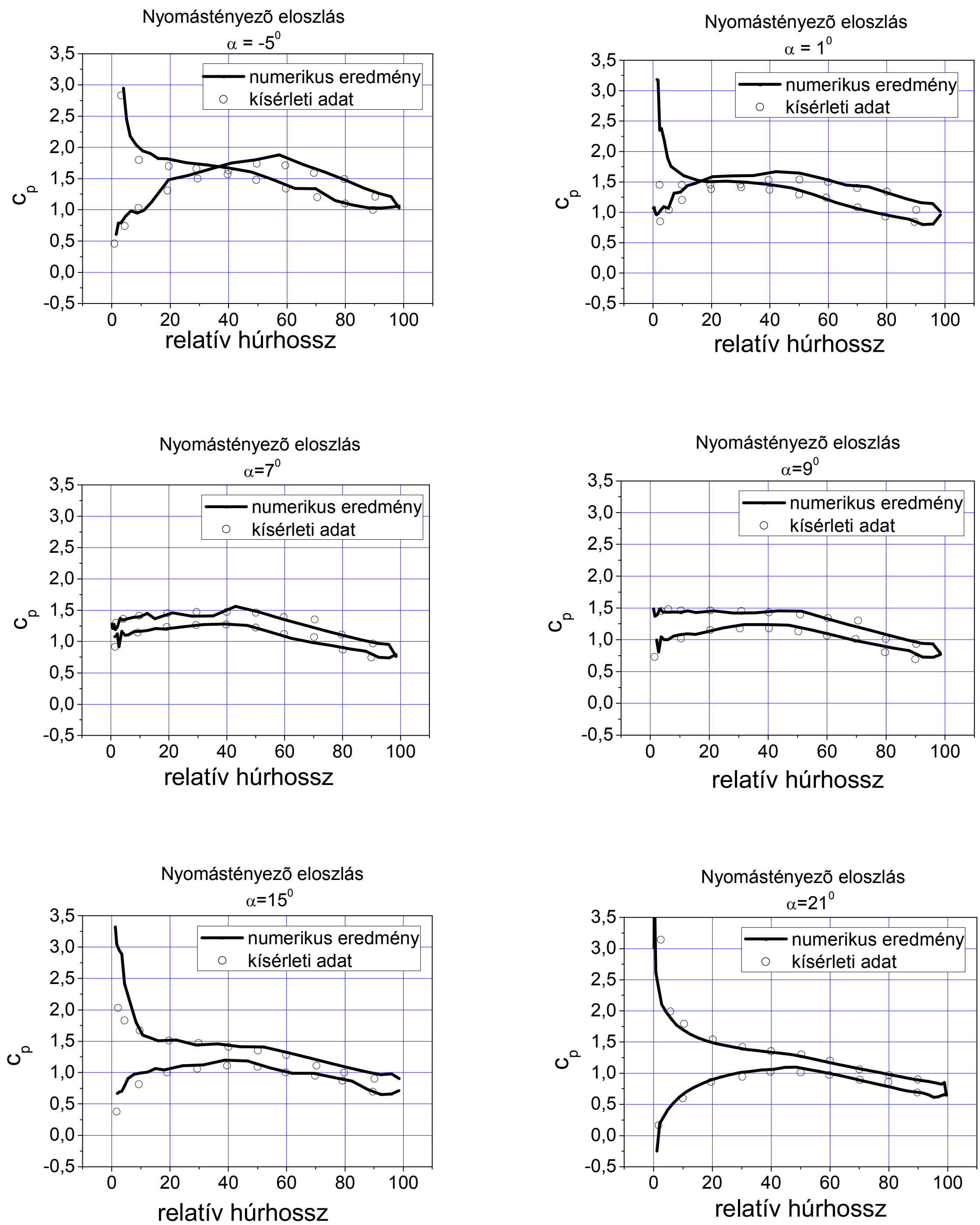
$$g = \frac{c}{\sigma}. \tag{67}$$

A β_1 és az α szögek az áramlás, illetve a húr és az axiális tengely által bezárt szögeket jelöli. A méréssel megegyező [4], a *Re*=2,45e5 Reynolds számnak megfelelő áramlás a következő peremfeltételek beállításával érhetük el: belépő torlóponti nyomás: $p_{tot,in}$=101750 [Pa]; belépő torlóponti hőmérséklet: $T_{tot,in}$=293.15 [K]; kilépő statikus nyomás: $p_{stat,out}$=101325 [Pa]. A H típusú strukturált numerikus háló elemszáma: 110×60. Az áramlástani számítás eredménye az 5. ábrán látható, amelyben a Mach szám eloszlást mutatjuk be β_1=30° és α =21° esetén.



5. ábra. Mach szám eloszlás a NACA 65-410 kompresszor lapátrácsban β_1=30°, α =21° és *Re*=2,45e5 ($v_{inf,\ inlet}$=29 m/s) esetén

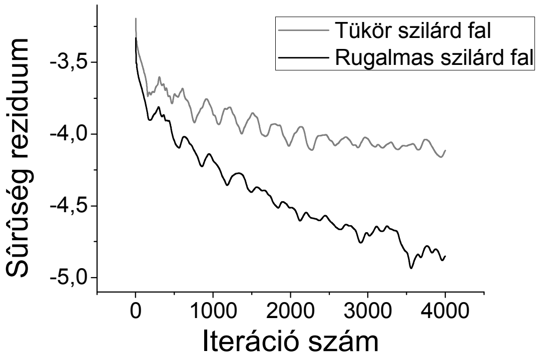
A kvalitatív számítási eredmények méréssel való összehasonlítása a nyomástényező értékének segítségével történt több állásszögön. Az eredmények a 6. ábrán láthatók. A vizsgált számítási eredmények jól korrelálnak a méréssel. A közöttük lévő különbség kisebb, mint 8 százalék, ami mérnöki szempontból elfogadható. A nyomástényező értéke jelentősebb eltérést a belépőél közelében mutat, ami a geometriai diszkretizáció pontatlanságának tudható be.



6. ábra. Nyomás tényező a relatív húrhossz függvényében különböző állásszögek esetén (β_1=30° and *Re*=2,45e5, $v_{inf,\ inlet}$=29 m/s, folytonos vonal: számítás eredménye, körök: mérés [4])

A nyomástényző a távoli rááramló torlóponti, dinamikus és a lokális statikus nyomások segítségével a következőképpen számítottuk ki,

$$C_P = \frac{p_{tot} - p_{stat,l}}{q_1}. \qquad (68)$$



7. ábra. A konvergencia lefutás tükör, illetve rugalmas szilárd fal alkalmazása esetén

A számítási sebesség csökkentése érdekében alkalmazott rugalmas fal – a konvergencia kritériumtól függően – jelentős hatást gyakorol a számítási időre. A 7. ábrán látható a sűrűség reziduum normalizált L_2 normája az iteráció szám függvényében a hagyományos (tükör) és a rugalmas fal tekintetében. Megfigyelhető, hogy az új eljárás esetén, 4000 iterációt követően, egy nagyságrenddel kisebb eredmény született. A sűrűség reziduum normalizált L_2 normája a következőképpen számolható,

$$\left\| \frac{\Delta\rho}{\rho} \right\| = log_{10} \sqrt{\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left(\frac{\Delta\rho_i}{\rho_i} \right)^2} , \qquad (69)$$

amelyben N_p a háló pontjainak száma és a Δ kifejezés két egymást követő idő iteráció közötti – jelen esetben sűrűség – változásra utal.

KONKLÚZIÓ

A jelen munkában egy kis számítógépi kapacitásigényű kétdimenziós numerikus áramlástani szoftvert dolgoztunk ki és érvényesítettünk. A módszer az Euler egyenletrendszerre épül és az összenyomható súrlódásmentesnek feltételezett áramlás modellezésére alkalmas. A beépített rugalmas fal peremfeltétel segítségével jelentősen csökkent a számítási idő (10-30 %), ami alkalmassá teszi a módszert összetettebb, például optimalizációs eljárásokkal való összekapcsolásra. A program eredményeinek ellenőrzésére két, mérésen alapuló tesztesetet modelleztünk és számoltunk ki. Az első egy NACA 65-410 típusú szárnyprofil körüli áramlás analízise és a felhajtóerő tényező meghatározása volt több állásszög esetén. A második egy ugyan ezen profil segítségével kialakított lapátrácsban kialakult áramlás eredményeinek méréssel való összehasonlítása, szintén több állásszög esetén. A számszerű eredmények mindkét esetben jól illeszkedtek a mérés eredményeire, az eltérés minden esetben 10 százalék alatt volt. Az eljárás pontosságának további vizsgálatára újabb érvényesítő számítások elvégzése szükséges, mielőtt felhasználható lenne kutatás következő lépésében, a felületmorfológiai optimalizációs eljárásban.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A jelen munka az OTKA F 67555 számú kutatási pályázat támogatásával jött létre.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] I. H. Abbott, A. E. von Doenhoff, and L. S. Stivers, NACA REPORT No. 824., Summary of Airfoil Data.
[2] K. M Body, Numerical Wave Propagation and Steady-State Solutions, Ph.D. thesis, Aerospace Engineering and Scientific Computing, University of Michigan, 1992.
[3] A. Demeulenaere, An Euler/Navier-Stokes Inverse Method for Compressor and Turbine Blade Design, Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, Inverse Design and Optimisation Methods, Lecture Series (1997-05), 1-45.
[4] J. C. Emery, et al., Systematic two-dimensional cascade tests of NACA 65-series compressor blades at low speeds, NACA Report 1368, 1958.
[5] MANNA M.: A Three Dimensional High Resolution Compressible Flow Solver. PhD Thesis in Catholic University of Louvain, 1992.
[6] P. L. Roe, Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, Journal of Computational Physics, Vol. 43 pp. 357-372, 1981.
[7] E. Stein, R. Borst and T. Hughes, Finite volume methods: foundation and analysis, Edited by John Wiley & Sons, Ltd. c 2004.
[8] H. C. Yee, A class of high-resolution explicit and implicit shock-capturing methods, VKI lecture series 1989-04, March 6-10, 1989; NASA TM-101088, Feb. 1989.