Prof. Dr. Szabolcsi Róbert[1]

A VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS ÁLTALÁNOS, ELFAJULT FELADATÁNAK MEGOLDÁSA[2]

A szerző célja bemutatni a variációszámítás általános, elfajult feladatának megoldását. A feladat matematikai megfogalmazása után megadja az extremum létezésének szükséges, és elégséges feltételeit, valamint a bizonyításhoz szükséges tételeket, és segédtételeket.

SOLUTION OF THE CLASSICAL PROBLEM OF CALCULUS OF VARIATIONS

The aim of the author is to present solution of the classical problem of the calculus of variations. After problem statement necessary and sufficient conditions of the existence of extremum of the given function, lemmas are summarized.

I. TUDOMÁNYOS ELŐZMÉNYEK, SZAKIRODALMAK BEMUTATÁSA

A variációszámítás matematikai elméleti összefüggéseit az [1][2][3][4][5][6][7][8] irodalmak mutatják be, míg a variációszámítás területéről példákat az [1][2][3][4][9] irodalmak mutatnak be. Az [1] irodalom a gyakorlati alkalmazások területén főleg a pilóta nélküli légijárművekre, és az űrrakétákra koncentrál. A [9] irodalom a pilóta nélküli légijárművek extremális pályatervezését mutatja be.

II. A VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS ELFAJULT FELADATÁNAK BEMUTATÁSA

Vizsgáljuk meg a variációszámítás elfajult feladatát, tekintsük adottnak a következő funkcionált [1]:

$$\frac{dz}{dx}+\varphi(x,y,z)\frac{dy}{dx}+\Psi(x,y,z)=0, \tag{2.1}$$

az alábbi kezdeti feltételek mellett:

$$z=z_o,\, ha\; x=x_o \tag{2.2}$$

Legyen az $y(x)$ függvény megengedett, az alábbi kezdeti, és végfeltételek mellett:

$$y(x_o)=y_o,\;\; y(x_k)=y_k \tag{2.3}$$

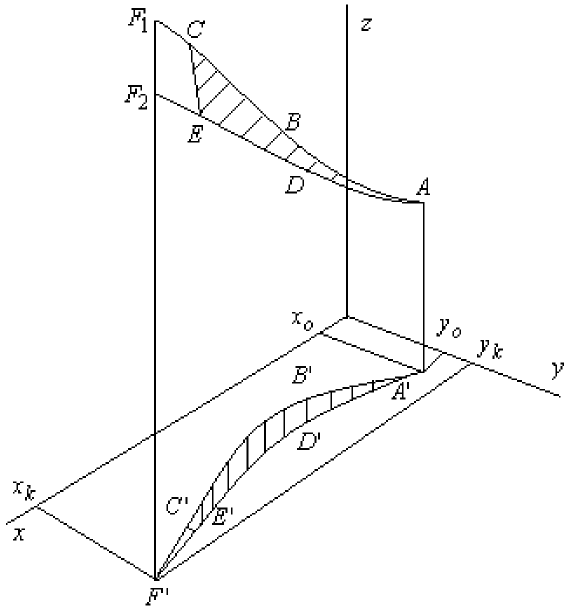
Feltételezzük, hogy a $\varphi(x,y,z)$, és a $\Psi(x,y,z)$ függvények folytonosak, és differenciálhatóak, az x,y,z független változók szerinti első differenciálhányadosok folytonosak, és a két függvény az y,z változók szerint kétszer differenciálhatóak.

---

[1] NKE HHK KÜLI Katonai Repülő és Légvédelmi Tanszék. Email: szabolcsi.robert@uni-nke.hu

[2] Lektorálta: Dr. Bottyán Zsolt, egyetemi docens, Nemzeti Közszolgálati Egyetem Katonai Repülő és Légvédelmi Tanszék, bottyan.zsolt@uni-nke.hu

Vizsgáljuk a variációszámítás feladatát az 1. ábrán. Az ábra alapján megállapíthatjuk, hogy az *Oxy* síkban az *A'* pontból az *F'* pontba történő eljutás navigációs feladata az *Oxyz* térben az *ABCF₁*, vagy az *ABD F₂* vonalakon történő mozgást jelenti. A *Oxyz* térben az *AB*, az *AD*, a *CF₁*, és a *CF₂* térbeli pályaívek határolták az *S₁* területet. Az *Oxy* vízszintes síkban az *A'B'*, az *A'D'*, a *C'F'*, és az *E'F'* térbeli pályaszakaszok határolták az S_2 területet.



1. ábra (Készítette: Szabolcsi, R.)

Az 1. ábrán látható pályaíveket minden egyes esetben, az *y(x)*, és a *z(x)* függvények folytonossági feltételeiből szokás meghatározni, amelyek segítségével az integrálás állandói meghatározhatóak [1]. A (2.1) egyenlet - a (2.2) kezdeti feltételek mellett - lehetővé teszi az $y(x)$ függvénytől függő z_k funkcionál meghatározását. E feladat abban tűnik ki, hogy a fenti függvény (kapcsolat) explicit módon nem írható fel.

Cseréljük fel szerepükben az $y(x)$ és a $z(x)$ függvényeket, valamint vezessük be az alábbi kezdeti feltételeket,

$$y(x_o) = y_o \tag{2.4}$$

és peremfeltételeket:

$$z(x_o) = z_o; z(x_k) = z_k \tag{2.5}$$

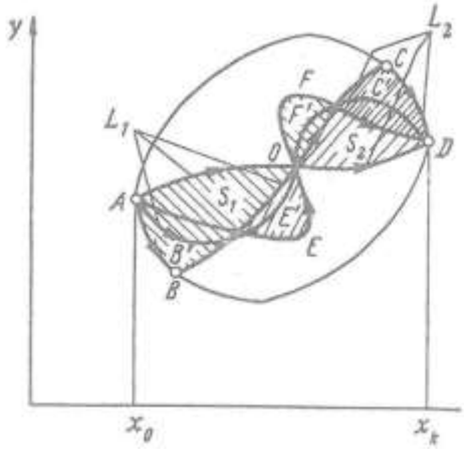
További vizsgálataink során feltételezzük, hogy az $\frac{1}{\varphi(x,y,z)}$, és az $\frac{1}{\psi(x,y,z)}$ függvények ugyanazon tulajdonságokkal rendelkeznek, mint az $\varphi(x,y,z)$, és az $\psi(x,y,z)$ függvények. Ebben az esetben feltételezzük, hogy a (2.4) kezdeti feltételekkel megadott (2.1) egyenlet a *z(x)* egyenleten implicit alakban adja meg az $y_k = y(x_k)$ funkcionált. Fogalmazzuk meg most a variációszámítás feladatát:

A megengedett függvények osztályán határozzuk meg azt az y(x) függvényt, amely biztosítja a (2.2) kezdeti feltételekkel megadott z_k *funkcionál maximális (minimális) értékét [1][6][7][8].*

Hasonló módon, a megengedett z(x) függvényeken keressük a (2.4) kezdeti feltételekkel megadott y_k funkcionál maximális (minimális) értékét.

III. A z_K FUNKCIONÁL ELSŐ ÉS MÁSODIK VARIÁCIÓINAK SZÁMÍTÁSA.

Vizsgáljuk meg az *Oxyz* térben két lehetséges függvényt, amelyek közötti távolságot jelölje $\delta\vec{r}(x)$, amelynek komponensei $\delta y(x)$, és $\delta z(x)$. A $\delta\vec{r}(x)$ vektorok összessége a két függvény között lineáris felületet alkot, amelynek a vízszintes síkra képzett vetületét vizsgáljuk meg a továbbiakban (2. ábra).



2. ábra (Forrás: РАБИНОВИЧ, Б. И. [1])

A térbeli pályák vízszintes síkra vetített nyomvonalait jelöljék az *ABOCD*, és az *AB'E'OF'C'D* vonalak (2. ábra). Kiindulva a (2.1) funkcionálból, határozzuk meg a z_k funkcionál növekményét, ha az *ABOCD* vonalról áttérünk az *AB'E'OF'C'D* vonalra:

$$\Delta z_k = \sum_i \iint_{S_1^i} \Phi(x,y,z)dxdy - \sum_j \iint_{S_2^j} \Phi(x,y,z)dxdy \tag{3.1}$$

$$\Phi(x,y,z) = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{y=áll.} - \left.\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right|_{x=áll.} \tag{3.2}$$

A (3.2) egyenlet alapján igazak továbbá az alábbi összefüggések is [1]:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{y=áll.} &= \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{y=áll.,z=áll.} + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=áll.}\\ \left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=áll.} &= \left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=áll.,z=áll.} + \left.\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=áll.}\end{aligned} \tag{3.3}$$

A (2.1) funkcionál alapján felírható, hogy:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=áll.} = -\Psi; \quad -\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=áll.} = -\varphi \tag{3.4}$$

A (3.2) egyenlet, figyelembe véve a (3.3)-(3.4) egyenleteket, a következő alakban is felírható:

$$\Phi(x,y,z)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\varphi\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{3.5}$$

A (3.5) egyenlet alapján könnyen belátható, hogy a (3.5) egyenlet nem függ az $y'(x)$, vagy a $z'(x)$ deriváltaktól.

Határozzuk meg a Δz_k funkcionál δy variációhoz számított növekmény fő részét, a közelítést másodrendű tagokkal elvégezve. Vezessük be az alábbi jelöléseket [1, 3]:

$$\begin{aligned} y(x)-y^o(x)&=\eta(x)\\ z(x)-z^o(x)&=\varsigma(x)\end{aligned} \tag{3.6}$$

ahol $y^o(x)$, és $z^o(x)$ a kezdeti vonalaknak felelnek meg, míg az $y(x)$, és a $z(x)$ hozzájuk közeli függvények.

Az $\eta(x)$ és a $\varsigma(x)$ függvények az alábbi egyenlőtlenségi korlátozások alá esnek:

$$\begin{aligned} 0\le|\eta(x)|&\le|\delta y(x)|\\ 0\le|\varsigma(x)|&\le|\delta z(x)|\end{aligned} \tag{3.7}$$

A $\Phi(x,y,z)$ függvényt írjuk fel a következő alakban [1][2][3][4][5][6]:

$$\Phi(x,y,z)=\Phi[x,y,z,(y)]=\Phi(x,y^o,z^o)+\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{x=áll.,y=y^o}\eta(x)+O(\rho^2) \tag{3.8}$$

ahol a (3.4) feltételeknek megfelelően:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{x=áll.,y=y^o}&=\left.\left(\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{x=áll.,z=áll.}+\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{x=áll.,y=áll.}\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=áll.}\right)\right|_{y=y^o}=\\ &=\left.\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right|_{y=y^o};\rho=\sqrt{\eta^2+\varsigma^2}\end{aligned} \tag{3.9}$$

A fenti megfontolások alapján a (3.1) egyenlet – másodrendű közelítéssel - a következő módon is megadható [1][3]:

$$\Delta z_k=\int_{x_o}^{x_k}\Phi(x,y,z)\delta y dx=\frac{1}{2}\int_{x_o}^{x_k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\delta y^2dx=\delta z_k+\delta^2 z_k \tag{3.10}$$

A z_k funkcionálnak a megengedett $y(x)$ függvény deriváltjához számított első, és második variációja – a (3.10) egyenlet alapján – most a következő egyenletekkel adható meg [1, 3]:

$$\delta z_k=\int_{x_o}^{x_k}\Phi(x,y,z)\delta y dx \tag{3.11}$$

$$\delta^2 z_k = \frac{1}{2}\int_{x_o}^{x_k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\delta y^2 dx \tag{3.12}$$

A z_k funkcionál extremumának számítása a (3.1), és a (3.10)-(3.12) egyenletek alapján történik.

Könnyen belátható, hogy a (2.1) egyenletet felírva a

$$\frac{dy}{dx} + \varphi^*(x,y,z)\frac{dz}{dx} + \Psi^*(x,y,z) = 0 \tag{3.13}$$

alakban,

és, figyelembe véve a (2.4) kezdeti, és a (2.5) peremfeltételeket, a Δy_k funkcionál a következő összefüggéssel adható meg:

$$\Delta y_k = \sum_i \iint_{S_1^i} \Phi^*(x,y,z)dxdy - \sum_j \iint_{S_2^j} \Phi^*(x,y,z)dxdy \tag{3.14}$$

ahol:

$$\Phi^*(x,y,z) = -\frac{1}{\varphi^2}\Phi(x,y,z) \tag{3.15}$$

IV. A z_K FUNKCIONÁL EXTREMUMÁNAK SZÜKSÉGES ÉS ELÉGSÉGES FELTÉTELEI

Feltételezzük, hogy a megengedett függvények osztályára teljesül, hogy a keresett vonalak végei a $\Phi = 0$ felületen fekszenek, más szóval,

$$\begin{aligned}\Phi(x_o, y_o, z_o) &= 0\\ \Phi(x_k, y_k, z_k) &= 0\end{aligned} \tag{4.1}$$

4.1. 1. Tétel

A z_k funkcionál *gyenge* maximuma létezésének feltétele az alábbi összefüggéssel adható meg [1][3][8]:

$$\Phi(x,y,z) = 0; \left.\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right|_{\Phi=0} \le 0 \tag{4.2}$$

A z_k funkcionál *gyenge* minimuma létezésének feltétele az alábbi összefüggéssel adható meg [1][3][8]:

$$\Phi(x,y,z) = 0; \left.\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right|_{\Phi=0} \ge 0 \tag{4.3}$$

A fenti feladat lehetővé teszi megoldást a folytonos első deriválttal rendelkező folytonos függvények osztályán.

Ha a z_o, az y_o, és az y_k kezdeti feltételek mellett a keresett extremális végpontjai nem esnek a $\Phi(x,y,z)=0$ felületre, más szóval, a (4.1) kezdeti feltételek nem teljesülnek, akkor vizsgáljuk meg a következő tétel teljesülését.

4.1. 2. Tétel

A z_k funkcionál *gyenge* maximuma létezésének szükséges feltétele, ha a keresett extremális részben a nyitott *S* tartományban helyezkedik el [1, 3]:

$$\Phi(x,y,z)=0; \left.\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right|_{\Phi=0} \le 0 \tag{4.4}$$

Az S_o tartomány *C* határvonala mentén vesz fel értéket az extremális, akkor igazak az alábbi egyenlőtlenségek [1][3][4][5][6]:

$$\Phi(x,y,z)\ge 0,\ ha\ \delta y<0 \tag{4.5. a}$$

$$\Phi(x,y,z)\le 0,\ ha\ \delta y>0 \tag{4.5. b}$$

ahol δy az adott határvonalon megengedett első variáció.

A z_k funkcionál *gyenge* minimuma létezésének szükséges feltételei az alábbiak:

$$\Phi(x,y,z)=0; \left.\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right|_{\Phi=0} \ge 0 \tag{4.6}$$

$$\Phi(x,y,z)\le 0,\ ha\ \delta y<0 \tag{4.7. a}$$

$$\Phi(x,y,z)\ge 0,\ ha\ \delta y>0 \tag{4.7. b}$$

Az előző két tétel a (3.11), és a (3.12) variációk alapösszefüggéseiből, és értelméből is következik. A (3.10) variációnövekmény egyenlete alapján bebizonyítható a következő tétel is.

4.1. 3. Tétel

A z_k funkcionál *erős* maximuma létezésének szükséges feltétele, ha a keresett extremális részben a nyitott *S* tartományban helyezkedik el [1, 3]:

$$\Phi(x,y,z)=0; \left.\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right|_{\Phi=0} <0 \tag{4.8}$$

Az S_o tartomány *C* határvonala mentén vesz fel értéket az extremális, akkor igazak az alábbi egyenlőtlenségek [1][3][4][5][6]:

$$\Phi(x,y,z)>0,\ \text{ha}\ \delta y<0 \tag{4.9. a}$$

$$\Phi(x,y,z)<0,\ \text{ha}\ \delta y>0 \tag{4.9. b}$$

ahol δy az adott határvonalon megengedett első variáció.

A z_k funkcionál *erős* minimuma létezésének szükséges feltételei az alábbiak:

$$\Phi(x,y,z)=0; \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\Bigg|_{\Phi=0} >0 \tag{4.10}$$

$$\Phi(x,y,z)<0, \text{ ha } \delta y<0 \tag{4.11. a}$$

$$\Phi(x,y,z)>0, \text{ ha } \delta y>0 \tag{4.11. b}$$

ahol δy az adott határvonalon megengedett első variáció.

Ha $\varphi=\varphi(z)$, vagyis φ nem függ az x és az y független változóktól, akkor a (4.8) feltétel az alábbi alakban is felírható [1][2][3][4][5][6][7][8]:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}-\varphi\frac{\partial\Psi}{\partial z}=0 \tag{4.12}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\Bigg|_{\Phi=0} <0, \tag{4.13}$$

ahol:

$$\Psi=\frac{\psi}{\varphi}; \quad \Phi=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\psi}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{4.14}$$

Összehasonlítva a (3.1) és a (3.14) egyenleteket megállapíthatjuk, hogy a z_k funkcionál (3.2) és (3.3) feltételek mellett meghatározott maximuma létezésének feltételei megegyeznek az y_k funkcionál minimuma létezésének feltételeivel [1][2][3].

A 3. tétel teljesülése mellett, feltételezzük, hogy a $z=f(x,y)$ függvény eleget tesz a $\Phi[x,y,f(x,y)]=0$ egyenletnek, valamint mindkét független változó tekintetében szigorúan monoton, és $\Phi>0$ esetén a $z=f(x,y)$ felület felett, míg $\Phi<0$ esetén a $z=f(x,y)$ felület alatt halad. Feltételezzük továbbá, hogy a megengedett $y(x)$ függvényosztályra a $z(x)$ monoton.

Vezessük be a következő jelöléseket:

1) $y=y_o^*$ legyen a

$$\Phi(x_o,y,z_o)=0 \tag{4.15}$$

egyenlet gyöke;

2) $y=y_k^*$ legyen - $x=x_k$ esetére - az $y=y_o^*$, $x=x_o$, $z=z_o$ kezdeti feltételek mellet a

$$\begin{gathered}\frac{dz}{dx}+\varphi(x,y,z)\frac{dy}{dx}+\psi(x,y,z)=0\\ \Phi(x,y,z)=0\end{gathered} \tag{4.16}$$

egyenlet parciális megoldása.

Az extremális mozgáspályák jellege függ a kezdeti pont x_o, y_o, a végpont x_k, y_k koordinátáinak az x_o, y_o^*, és az x_k, y_o^* koordinátájú pontok helyzetétől, más szóval, rögzített végpontú x_k, y_k koordináták esetére a kezdeti pont és a $\Phi(x, y, z) = 0$ felület egymáshoz képest felvett helyzetétől.

Az extremális mozgás pályán történő mozgás jellegét a kezdeti és a végpont

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{4.17}$$

egyenlettel megadott vonalhoz képest felvett helyzete határozza meg. [1][2][3]

V. ÖSSZEFOGLALÁS, EREDMÉNYEK

A légijárművek pályatervezése során gyakran törekszünk az extremális pályán történő repülésre. Ezzel lehetővé válik olyan repülési-, és navigációs feladatok megoldása, mint a repülés a legrövidebb idő alatt, repülés a legrövidebb úton, repülés a legnagyobb távolságra, repülés minimális energiafelhasználással, repülés a legkisebb repülési magasságon. A kisméretű pilóta nélküli légijárművek repülése általában alacsony repülési magasságon valósul meg, ahol fennáll a veszélye a természetes-, és a mesterséges tereptárgyakkal való összeütközés veszélye. A pályatervezés során akár több tényezőt is figyelembe kell venni, és ebben az esetben, háttérbe szorulhat pl. a minimális energiafelhasználással végrehajtott repülés követelménye, és előtérbe kerül az összeütközés kizárását, vagy annak valószínűségét minimáló repülési pályák tervezése. Különösen fontos ez abban az esetben, ha az UAV üzemeltetése olyan repülőtérről történik, ahol más légijárművek is használják a légteret.

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] РАБИНОВИЧ, Б. И. *Вариационные режимы полета крылатых летателъных аппаратов,* Машиностроение, Москва, 1966 (orosz nyelven).

[2] CSÁKI, F. *Korszerű szabályozáselmélet. Nemlineáris, optimális, és adaptív rendszerek*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.

[3] KÓSA, A. *Variációszámítás*, 2. javított kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.

[4] KORN, G. A. - KORN, T. M *Matematikai kézikönyv műszakiaknak*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.

[5] BRONSTEIN, I. N., SZEMENGYAJEV, K. A. *Matematikai zsebkönyv mérnökök és mérnökhallgatók számára, 5. kiadás,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982.

[6] БРОНШТЕЙН, И. Н. - СЕМЕНДЯЕВ, К. А. *Справочник по математике*, Москва, Наука, 1986 (orosz nyelven).

[7] КРАСОВСКИЙ, А. А. (Под. ред.) *Справочник по теории автоматического управления*, Москва, Наука, 1987 (orosz nyelven).

[8] PROF. DR. SZABOLCSI, R.: A variációszámítás alapösszefüggései, és gyakorlati alkalmazása, Szolnoki Tudományos Közlemények XV, HU ISSN 2060-3002, pp(1-15) 2011. http://www.szolnok.mtesz.hu/sztk/kulonszamok/2011/cikkek/Szabolcsi_Robert.pdf

[9] PROF. DR. SZABOLCSI, R.: UAV extremális repülési pálya számítása, Szolnoki Tudományos Közlemények XV, HU ISSN 2060-3002, pp (1-7), 2011. http://www.szolnok.mtesz.hu/sztk/kulonszamok/2011/cikkek/Szabolcsi_Robert_2.pdf