REPÜLÉSTUDOMÁNYI KÖZLEMÉNYEK
REPÜLÉSTUDOMÁNYI KONFERENCIA 2013
On-Line tudományos folyóirat
XXV. évfolyam 2013. 2. szám

Balogh Zsuzsanna[1] – Hanka László[2]

BAYES-ANALÍZIS A KOCKÁZATELEMZÉSBEN, DISZKRÉT VALÓSZÍNŰSÉG ELOSZLÁSOK ALKALMAZÁSA[3]

Ebben a dolgozatban a Bayes-féle módszer alkalmazási lehetőségét mutatjuk be a kockázatelemzés illetve a mérnöki tervezés problémakörében. A Bayes-féle módszer vonzóereje abban áll, hogy képes egyesíteni a megfigyelésből kapott adatokból valamint az a priori feltevésekből kapott információkat, ezáltal generálva egy a posteriori információt olyan mennyiségekkel kapcsolatban, amelyek a vizsgálatok szempontjából fontosak. A módszer tényleges hatékonyságát az mutatja, hogy az a priori becslésekről az a posteriori becslésekre történő áttérés tetszőlegesen sokszor ismételhető. Ez a módszer egyaránt hatékonyan alkalmazható ritka eseményekkel kapcsolatos mérnöki tervezésben valamint kockázatelemzésben és a tudomány egyéb területein is.

BAYESIAN ANALYSIS IN RISK ASSESSMENT,
APPLICATION OF DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

This work discusses the applicability of Bayesian methods to probabilistic risk assessment and engineering design problems. The attraction of Bayesian methods lies in their ability to integrate observed data and prior knowledge to form a posterior distribution estimate of a quantity of interest. Conceptually, Bayesian methods are desirable because they have the property of taking prior estimates and updating them with data over time. This methodology might be useful to engineering managers for rare event risk analysis in other applications and other disciplines as well.

1. Bevezetés

A Bayes-féle analízis a valószínűség elmélet igen hatékony eszköze, amely módszer napjainkban, különösen a terrorcselekményekkel kapcsolatosan, de egyéb mérnöki tervezési gyakorlatban is egyre elterjedtebben alkalmazott kockázatelemzési módszer [1][2]. A Bayes-elmélet kvalitatíve egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy olyan esetekben is eredménnyel alkalmazható, amikor a vizsgált jelenség nagyon ritka, így a hagyományos gyakorisági analízisen alapuló valószínűségi módszerek csődöt mondanak, mert a statisztikai elemzéshez nem áll rendelkezésre kellő méretű minta. Ritka események pedig tipikusan a kockázatelemzés témakörében fordulnak elő. Ebben az esetben a módszer egy a priori becslésre épül, amely nem elsősorban a tapasztalatból levont következtetéseket tartalmaz, hanem inkább elméleti jellegű megfontolások eredménye. Ezeket a kezdeti becsléseket lehet az analízis során frissíteni, valahányszor a tapasztalat a birtokunkba juttat információkat a vizsgált rendszerrel kapcsolatban. A frissítés pedig elméletileg tetszőlegesen sokszor ismételhető, az alább bemutatott példákban egyszerű matematikai formulák felhasználásával [3]. Ebben a dolgozatban az egyik legfontosabb és legszéleskörűbben alkalmazható diszkrét eloszlás, a binomiális eloszlás és ennek többdimenziós megfelelője, a polinomiális eloszlás kapcsán mutatjuk be az elmélet alkalmazhatóságát.

---

[1] mk. alezredes, HM Hadfelszerelési és Vagyonfelügyeleti Főosztály, balogh.zsuzsanna@hm.gov.hu
[2] dr; Óbudai Egyetem Bánki Donát Gépész és Biztonságtechnikai Mérnöki Kar Mechatronikai Intézet, hanka.laszlo@gbk.uni-obuda.hu
[3] Lektorálta: Prof. Dr. Pokorádi László, egyetemi tanár, Debreceni Egyetem, pokoradi@eng.unideb.hu

2. A Bayes-analízis alapgondolata

Tegyük fel, hogy egy olyan valószínűségi modellt alkalmazunk, amely egy $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel leírt valószínűség eloszlással adható meg [4][5][6]. Ebben a modellben mindig vannak paraméterek, amelyek a modell leglényegesebb jellemzői, és amelyek változtatása lehetővé teszi a modell pontosítását. Jelölje ezt a paramétert Θ, amely lehet skalár, ha egyetlen paraméterről van szó, Θ = θ, de lehet vektor is $\boldsymbol{\Theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots)$, ha a modellben több paraméter szerepel. Ebben az esetben a sűrűségfüggvényt $f(x|\Theta)$ jelöli, hangsúlyozva a paramétertől való függést. A Bayes-analízis alkalmazásának egyik sarkalatos pontja, hogy a Θ paramétert úgy tekintjük, hogy maga is valószínűségi változó, melynek eloszlását jelölje π(Θ), ezt nevezzük a priori eloszlásnak. Ha a paraméterek egy T tartományon vehetnek fel értéket, akkor a Bayes-tétel általános alakja a következő:

$$\pi(\Theta|x) = \frac{f(x|\Theta)\cdot\pi(\Theta)}{f(x)} = \frac{f(x|\Theta)\cdot\pi(\Theta)}{\int_T f(x|\Theta)\cdot\pi(\Theta)\,\mathrm{d}\Theta} \tag{2.1}$$

ahol $\pi(\Theta|x)$ jelöli az a posteriori eloszlás sűrűségfüggvényét [4,5,6]. Általában a Θ valószínűségi változó egy olyan valószínűség eloszlással adott, amely ugyancsak paraméterektől függ, ezeket az elméletben hiperparamétereknek nevezzük. Jelölje most ezeket α, amely ugyancsak lehet skalár vagy vektor attól függően, hogy hány paraméterrel adott eloszlással modellezzük a Θ paramétert. Ezt is kifejezésre kell juttatnunk a jelöléseinkben, ha hangsúlyozni szeretnénk a hiperparaméterek jelenlétét és szerepét. Ekkor a Bayes-tétel általánosabb alakja:

$$\pi(\Theta|x,\alpha) = \frac{f(x|\Theta,\alpha)\cdot\pi(\Theta|\alpha)}{f(x|\alpha)} = \frac{f(x|\Theta,\alpha)\cdot\pi(\Theta|\alpha)}{\int_T f(x|\Theta,\alpha)\cdot\pi(\Theta|\alpha)\,\mathrm{d}\Theta} \tag{2.2}$$

Itt bevezetjük az elméletben szokásos elnevezéseket a $\pi(\Theta)$, $\pi(\Theta|\alpha)$ az a priori eloszlás, a $\pi(\Theta|x)$, $\pi(\Theta|x,\alpha)$ az a posteriori eloszlás, és végül az $f(x|\Theta)$, $f(x|\Theta,\alpha)$ a likelihood függvény [7]. Ezen bevezető után a Bayes-analízis alkalmazási lehetősége illetve az alkalmazás logikája a következőkben áll. Vizsgálunk egy kockázati tényezőt jelentő problémát, amely kockázatot egy valószínűségi változóval írunk le. Ez lehet diszkrét és lehet folytonos eloszlású is. Ebben a dolgozatban a diszkrét eloszlás alkalmazási lehetőségét mutatjuk be. Ezt a valószínűség eloszlást egy likelihood függvénnyel vesszük figyelembe. Ebben a függvényben vannak szabad paraméterek, amelyek az eloszlás jellemző adatai. Tegyük fel, hogy ezekről az adatokról kevés információnk van, ugyanis mint alább kiderül, az elmélet éppen ebben a szituációban alkalmazható gyümölcsözően. Ha kevés az információ az alkalmazott eloszlás paramétereiről, akkor logikus feltevés, hogy tekintsük ezen paramétereket is valószínűségi változónak. Ezen valószínűségi változók is bizonyos újabb paraméterekkel, a hiperparaméterekkel definiált valószínűségi változókkal írhatók le. Kezdetben élünk ezen paraméterekre vonatkozólag kiindulási feltételekkel. Ezen feltételek definiálják az a priori eloszlást. Ezután, a birtokunkba került adatok és a Bayes-tétel (2.1) vagy (2.2) alakja felhasználásával frissítjük az a priori eloszlást, áttérünk az a posteriori eloszlásra, ami azt jelenti, hogy ebben a lépésben a hiperparaméterek aktualizált értékét tekintjük paraméternek. Ezek egy újabb információ beérkezésekor ismét a priori adattá válnak, amelyek az említett frissítési eljárással akárhányszor aktualizálhatók.

3. Béta a priori-eloszlás és binomiális eloszlás, mint likelihood függvény

Az egyik legfontosabb és leggyakrabban alkalmazott diszkrét eloszlás a binomiális eloszlás: Bin(n, p). Paraméterei az n pozitív egész szám és a $p \in [0,1]$ valós szám [4,5,6]. Az általunk vizsgált kockázatelemzési kérdéskörben előfordulhat az alábbi szituációkban:

1. Adott egy rendszer (informatikai, biometrikus, elektronikus, pénzügyi, gazdasági, vagy egy épület, amely épsége az épület részegységeinek sértetlenségén múlik), amelynek alkatrészei, részegységei azonos körülmények között, egymástól függetlenül működnek, és mindegyik meghibásodásának a valószínűsége azonos p érték. Ez a p érték ebben az esetben az adott összefüggő rendszer részeivel kapcsolatosan annak valószínűségét adja meg, hogy egy esetleges terrorcselekmény sikeres kimenetelű, vagy nem.

2. Egy adott esemény azonos körülmények között n-szer ismétlődik egymástól függetlenül, és minden alkalommal p valószínűséggel következik be egy nemkívánatos esemény. (Azt az esetet, amikor a közelítő vagy teljes azonosság feltevése a modellben túlzottan ideálisnak mondható és így nem alkalmazható, a következő 4. pontban vizsgáljuk.)

A probléma 1. pontbeli modellel történő leírása például a következő esetekben használható:

i) Tekintsünk például egy informatikai hálózatot, amelyet n db azonos jellemzőkkel adott szerver lát el. Tegyük fel, hogy a hálózat működőképes marad, ha legfeljebb k_0 db szerver meghibásodik, de ennél több meghibásodás a rendszer összeomlását eredményezi.

ii) Tekintsünk egy épületet, amelyet n db fő szerkezeti elem tart stabilan. A mérnöki tervezés alapján tudjuk, hogy ezek közül k_0 db megsérülhet a teljes kollapszus nélkül.

Világos, hogy mindkét esetben alapvető kérdés a bekövetkezett események száma. Mindkét esetben azt a kérdést tesszük fel, mi a valószínűsége, hogy a rendszerben k db részegység esetében bekövetkezik egy esemény, illetve ismétlődés során az esemény k alkalommal sikeres ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$). Vizsgáljunk tehát egy olyan modellt, amelyben a likelihood függvény binomiális eloszlással adott, ahol modellparaméterek az n és p. Nyilvánvaló a probléma természetéből adódóan, hogy a kritikus paraméter ebben az esetben a p. Mivel $p \in [0,1]$, ezért a $\theta = p$ paraméter modellezésére a priori eloszlásként a legjobb választás a béta eloszlás [4,5,6]. A Beta(α, β) eloszlás éppen ezen az intervallumon van értelmezve, paraméterei $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Hogy mire célzunk azzal, hogy „legjobb választás”, az alábbiakból kiderül. A likelihood függvény most tehát binomiális eloszlással adott

$$f(x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \theta^x (1-\theta)^{n-x}, \tag{3.1}$$

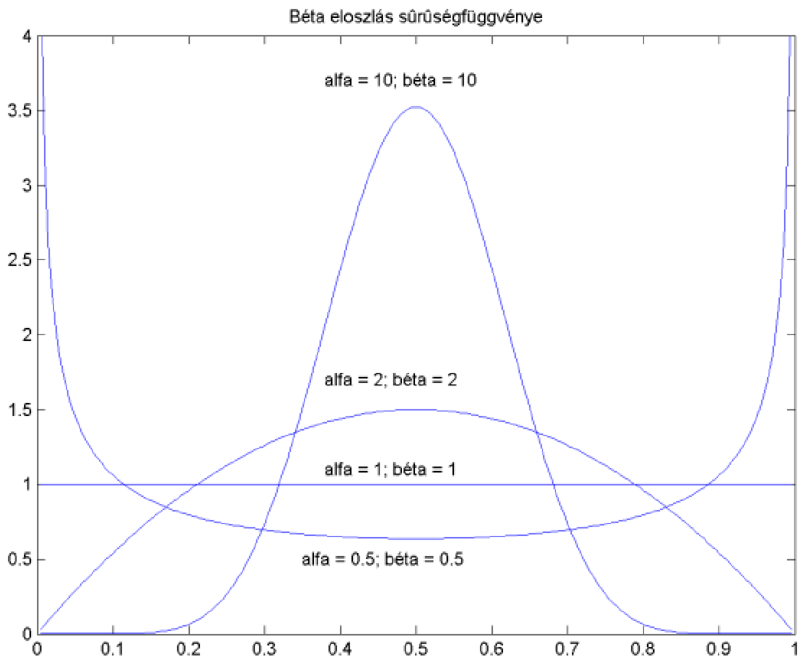
az a priori eloszlás pedig béta eloszlással. A szokásos jelölésekkel:

$$\pi(\theta|\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}, \qquad (3.2)$$

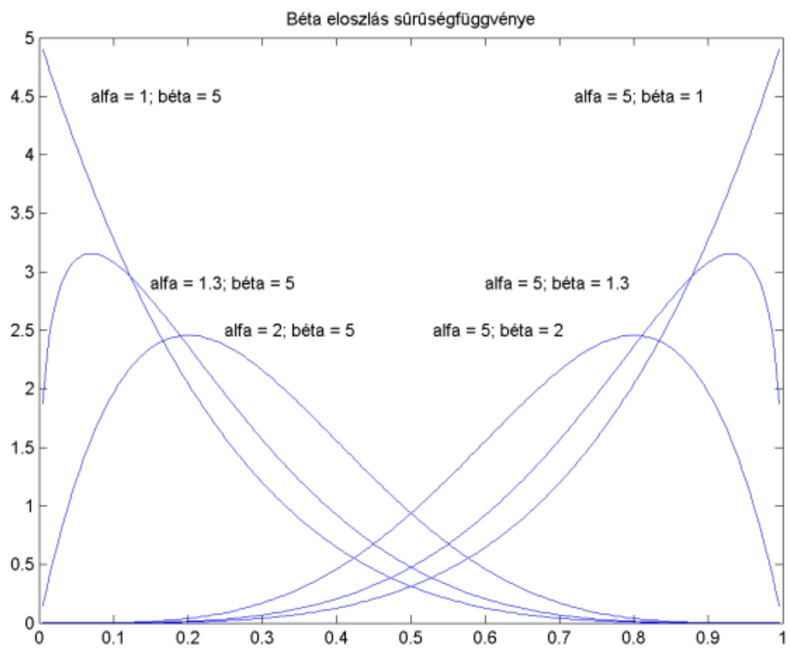
ahol $\Gamma(x)$ az analízisből ismert gamma függvény [4]. Ebben az esetben tehát a vizsgált problémát a p modellparaméterrel tudjuk leírni, amelynek az értéke nem ismert. Ezért a p paramétert béta a priori eloszlással írjuk le, amelynek paraméterei, a hiperparaméterek $\alpha > 0$ és $\beta > 0$. Feltételezünk valamit erről a két paraméterről és ezzel kiszámítjuk a likelihood függvény felhasználásával a kérdéses valószínűséget. Ha azonban a birtokunkba kerül néhány adat, akkor frissíteni tudjuk a hiperparaméterek értékét. Ezt illusztráljuk az alábbiakban. Mielőtt azonban alkalmazzuk a Bayes-tételt, megadjuk a béta eloszlás jellemző adatait:

$$E = \frac{\alpha}{\alpha+\beta};\ Var = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)};\ Mod = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2};(\alpha>1;\beta>1); \qquad (3.3)$$

ahol szokásosan E jelöli a várható értéket, Var a szórásnégyzetet (variancia), Mod a móduszt. Azért adtunk meg több jellemzőt is, mert bár a gyakorlatban a legtöbbször a várható értéket tekintik pontbecslésként, ugyanolyan joggal használható például a módusz és esetleg a medián is, ha ezek léteznek.



1.a) ábra A béta eloszlás sűrűségfüggvénye különböző paraméterek esetén



1.b) ábra A béta eloszlás sűrűségfüggvénye különböző paraméterek esetén

Az 1.a) és b) ábrákon a B(α, β) eloszlás sűrűségfüggvényét ábrázoltuk különböző α és β hiperparaméterek esetén. Amit hangsúlyozunk, az $\alpha = \beta$ eset, amikor B(α, α) sűrűségfüggvénye szimmetrikus az $x = \frac{1}{2}$ pontra, ez látható az a) ábrán. Ha $\alpha = 1$, akkor az egyenletes eloszlást kapjuk, ezt használhatjuk akkor, ha semmiféle kezdeti információnk nincs a p paraméter értékét illetően. Ha $\alpha > 1$ akkor a sűrűségfüggvénynek maximuma van az $x = \frac{1}{2}$ helyen, ha pedig $\alpha < 1$, akkor ugyanezen a helyen minimum van. Ha olyan információk birtokában vagyunk, amely szerint p értéke kicsi, közel van 0-hoz, illetve ellenkezőleg, ha p értéke nagy, közel van az 1-hez, akkor a b) ábrán látható aszimmetrikus eloszlások közül választhatunk.

Alkalmazzuk most a Bayes-tételt, határozzuk meg az a posteriori eloszlást. Ha eltekintünk a nevezőtől, mint normáló tényezőtől, a hiperparamétereket is hangsúlyozva, írhatjuk, hogy:

$$\pi(\theta|x,\alpha,\beta) = f(x|\theta,\alpha,\beta)\cdot\pi(\theta|\alpha,\beta) \sim \frac{n!}{k!(n-k)!}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} \qquad (3.4)$$

Ha elvégezzük az összevonásokat, akkor ismét csak eltekintve a konstans szorzóktól, a szokásos jelölésekkel az adódik, hogy

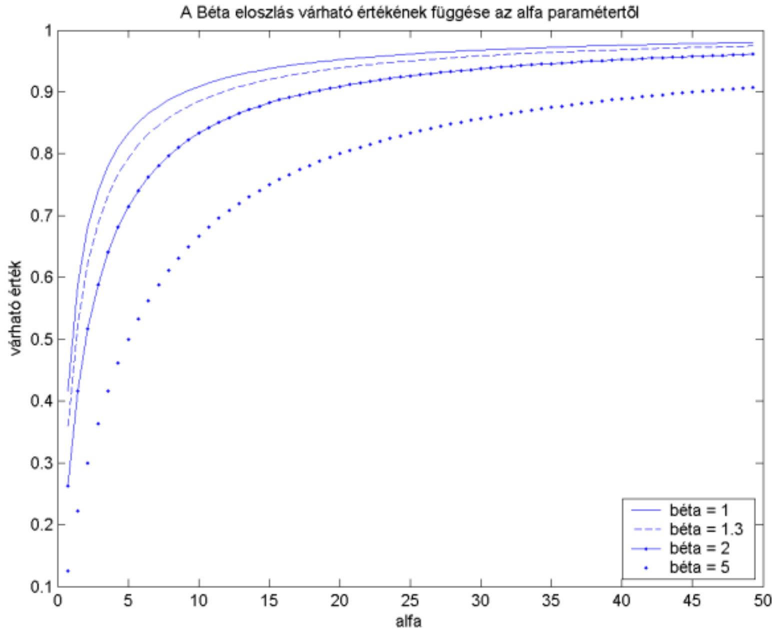
$$\pi(\theta|x,\alpha,\beta) \sim \binom{n}{x}\cdot\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\cdot\theta^{\alpha+x-1}(1-\theta)^{n-x+\beta-1} \sim \frac{1}{B(\alpha+x,\beta+n-x)}\cdot\theta^{\alpha+x-1}(1-\theta)^{\beta+n-x-1} \qquad (3.5)$$

Ami ugyancsak béta eloszlás $\alpha + x$, $\beta + n - x$ paraméterekkel, tehát az a posteriori eloszlás: Beta($\alpha + x$, $\beta + n - x$). Az eredmény lényege, hogy ha binomiális eloszlást alkalmazunk likelihood függvényként, és béta eloszlást a priori eloszlásként, az a posteriori eloszlás ugyancsak béta eloszlás. Ez úgy is fogalmazható, hogy a binomiális eloszlás konjugáltja a béta eloszlás. Az a posteriori eloszlásból kapjuk a binomiális eloszlás p paraméterének a frissített értékét. Erre alkalmazható elvileg a bemutatott paraméterek mindegyike, melyeknek aktualizált értéke rendre:

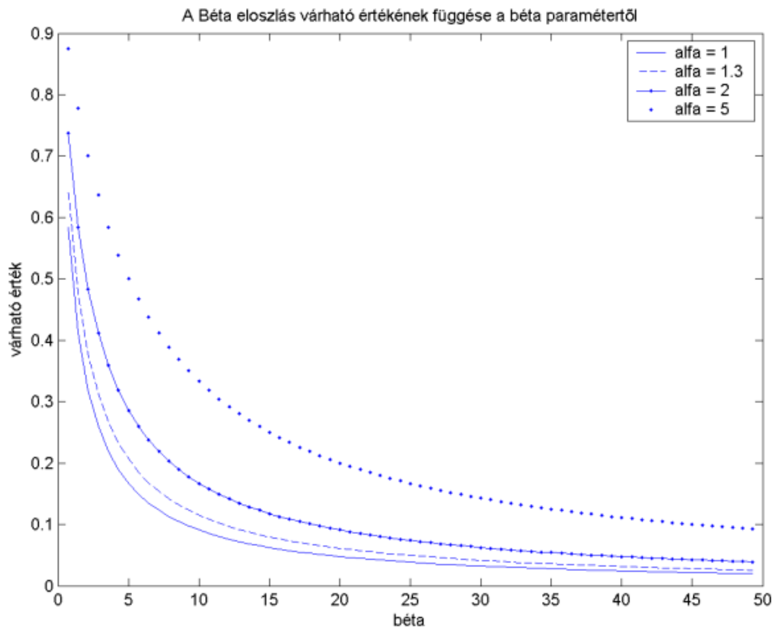
$$E' = \frac{\alpha + x}{\alpha + \beta + n};\ Var' = \frac{(\alpha + x)(\beta + n - x)}{(\alpha + \beta + n)^2 (\alpha + \beta + n + 1)};$$
$$Mod' = \frac{\alpha + x - 1}{\alpha + \beta + n - 2}; (\alpha + x > 1; \beta + n - x > 1); \tag{3.6}$$

A szokásoknak megfelelően irányítsuk figyelmünket a várható értékre. Ekkor a p paraméter, amely tehát egy nemkívánatos esemény bekövetkezésének a valószínűségét jelenti, és béta eloszlással modellezzük, kezdetben az $E = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ a priori becsléssel írható le. Ha ezek után végzünk n db megfigyelést, vagy másképpen fogalmazva megfigyelünk egy n db azonos komponensből álló rendszert, és a megfigyelés eredménye az, hogy x alkalommal bekövetkezett a nemkívánatos esemény, és eszerint $n - x$ alkalommal nem következett be, akkor a p valószínűség frissített értéke $E' = \frac{\alpha + x}{\alpha + \beta + n}$. Itt elvégezhetünk egy egyszerű elemzést az a priori és a posteriori eloszlások összehasonlítására. Vezessük be a $\lambda = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta + n}$ jelölést, amikor is $1 - \lambda = \frac{n}{\alpha + \beta + n}$. Ekkor a p paraméter a posteriori eloszlás alapján – a várható értékkel becsült – aktualizált értéke felírható az $E' = \lambda \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + (1 - \lambda)\frac{x}{n}$ konvex lineáris kombináció alakjában, ahol az értelmezés szerint teljesül, hogy $\lambda \in [0,1]$. Ahogyan λ változik 0-tól 1-ig, E' értéke változik $\frac{x}{n}$ és E között. Ha tekintetbe vesszük λ értelmezését, kijelenthetjük a következőket. Mérési adatok nélkül $\lambda = 1$, tehát a modellparaméter éppen a béta eloszlás várható értéke, $p = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$. Ha növeljük a megfigyelések n számát, λ értéke csökken, határesetben, ha $n \to \infty$, akkor $\lambda \to 0$. Ebben az esetben $E' \to \frac{x}{n}$, ami éppen a maximum likelihood becsléssel kapott érték [7]. Ez azt jelenti, hogy ha sok a mérési adat, egyre kevéssé dominál a szubjektívnek tekinthető a priori béta eloszlás, a szubjektivitásnak egyre kisebb a hatása az a posteriori eloszlásra. Végül ha $n \to \infty$, akkor tekintettel arra, hogy a szórásnégyzet (*Var*) nevezője az n magasabb fokú polinomja, mint a számláló, következik, hogy $Var' \to 0$, tehát az a posteriori becslés bizonytalansága egyre kisebb. Az elemzés elvégezhető a várható érték helyett a móduszra is, ha az analízis azt mutatja, hogy célszerűbb ez utóbbit használni a p paraméter pontbecsléseként.

Annak érdekében, hogy könnyebben tudjunk dönteni afelől, hogy mely paraméterekkel adott béta eloszlást célszerű választani, szemléltetjük a 2.a) és b) ábrákon, hogy hogyan függ a várható érték az egyes paraméterektől, ha az egyik paraméter értékét (különböző módon) rögzítjük. Ez az elemzés értelemszerűen elvégezhető a módusszal kapcsolatban is, ha úgy döntünk, hogy nem a várható értékkel modellezzük a kérdéses paramétert.

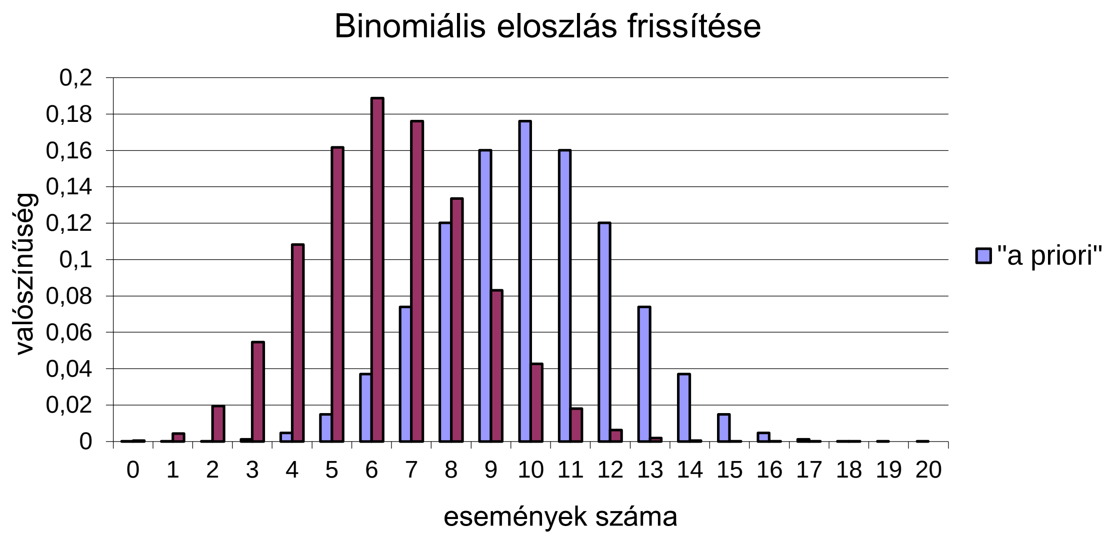


2.a) ábra A béta eloszlás várható értékének függése a paraméterektől.



2.b) ábra A béta eloszlás várható értékének függése a paraméterektől

Tekintsünk egy illusztratív példát amelyben n = 20, egymástól függetlenül működő, azonos egységből álló rendszert vizsgálunk. Tegyük fel, hogy kezdetben a független egységek meghibásodásának valószínűségéről nincs közelebbi információnk. Alkalmazzuk tehát a priori eloszlásként a Beta(1, 1), egyenletes eloszlást. Ennek alapján a p paraméter kezdőértékére a $p = \frac{1}{2}$ értéket kapjuk. Tegyük fel, hogy egy megfigyelés alkalmával azt tapasztaljuk, hogy $x = 6$ részegység esetében következik be nemkívánatos esemény. Ezzel aktualizálhatjuk a p paraméterre vonatkozó becslésünket: $p' = 0{,}318$. Az eredeti p értékhez tartozó binomiális eloszlást valamint a frissített p' paraméterrel adott eloszlást szemlélteti a 3. ábra. Egy koordinátarendszerben ábrázoltuk mindkét eloszlás hisztogramját, hogy a változás könnyebben összehasonlítható legyen.



3. ábra Az a priori és az a posteriori becslés alapján adódó binomiális eloszlás

Tegyük fel, hogy a rendszer legfeljebb három egység meghibásodása esetén működik zavartalanul. Ha a két eloszlás alapján ezeket kiszámítjuk, azt kapjuk, hogy az első esetben $P = 0{,}0012$ míg a frissített paraméterek esetén $P' = 0{,}0789$. Amely adatok ismeretében a kockázatok változása számszerűsíthető, az adott esetben azt kapjuk, hogy a kockázat értéke kereken a 65-szörösére növekedett a kezdeti feltevéseinkhez képest.

4. Dirichlet a priori-eloszlás és polinomiális eloszlás, mint likelihood függvény

Nyilvánvalóan felmerül az igény az előző pontban leírt modell általánosítására arra az esetre, amikor:

1. Egy rendszer komponensei nem azonosak, különböző valószínűséggel hibásodnak meg, bár továbbra is feltesszük, hogy egymástól függetlenül.

2. Események egy sorozata nem azonos körülmények között ismétlődik, így nem vehetünk figyelembe minden eseményhez azonos p paramétert a bekövetkezés valószínűségeként.

Az általánosítás kézenfekvő, mind logikailag, mind matematikailag [4,5,6]. A binomiális eloszlás helyett az $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots X_k)$ vektorváltozó leírására ennek többdimenziós megfelelőjét a polinomiális eloszlást tekintjük: Poli(n, p_1, p_2, ..., p_k). Az n nem negatív egész paraméter ebben az esetben is a megfigyelések számát jelenti, a $p_i \in [0,1], (i = 1, 2, \dots, k)$ paraméterek pedig a k-db osztályba sorolható események bekövetkezésének valószínűsége, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Ha ezek az események rendre, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ alkalommal következnek be, ahol nyilván $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$, akkor a polinomiális eloszlásra épülő k-dimenziós modell, vagyis a likelihood függvény alakja a következő:

$$\ell\left(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k, n \middle| x_1, x_2, \ldots, x_k\right) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} x_i!} \cdot \prod_{i=1}^{k} \theta_i^{x_i} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)!}{\prod_{i=1}^{k} x_i!} \cdot \prod_{i=1}^{k} \theta_i^{x_i} \tag{4.1}$$

ahol a paraméterek vektora $\Theta = \left(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\right) = \left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right)$. A polinomiális eloszlással kapcsolatosan megjegyezzük, hogy az X_i valószínűségi változó várható értéke és szórása a következő:

$$E\left(X_i\right) = np_i;\ Var\left(X_i\right) = np_i\left(1 - p_i\right) \tag{4.2}$$

A paraméterek eloszlása modellezhető a k-dimenziós, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ hiperparaméter-vektorral adott Dirichlet-eloszlással, amely a béta eloszlás többdimenziós általánosítása [4]. Az a priori eloszlás tehát a következő:

$$\pi\left(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k \middle| \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\right) = \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^{k} \Gamma\left(\alpha_i\right)} \cdot \prod_{i=1}^{k} \theta_i^{\alpha_i - 1} \tag{4.3}$$

ahol $\alpha_i > 0$, $\theta_i > 0$; ($i = 1, 2, \ldots, k$), és $\sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1$. Az eloszlás jellemzői:

$$E\left(X_{i_0}\right) = \frac{\alpha_{i_0}}{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i};\ Mod\left(X_i\right) = \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_0 - k},\ \text{ha } \alpha_i > 1;\ Var\left(X_i\right) = \frac{\alpha_i\left(\alpha_0 - \alpha_i\right)}{\alpha_0^2\left(\alpha_0 + 1\right)};\ \text{ahol } \alpha_0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \tag{4.4}$$

Abban az esetben, ha nincs kezdeti információ a p_i paraméterekről, amikor tehát nincs okunk egyiket sem kitüntetni a többivel szemben, az egyenletes Dirichlet-eloszlást lehet alkalmazni, amikor is $\alpha := \alpha_1 = \ldots = \alpha_n$. Alkalmazzuk a Bayes-tételt az a posteriori eloszlás meghatározására. Ha ismét eltekintünk a konstans szorzóktól, azaz a nevezőbeli normalizáló állandótól, akkor kapjuk, hogy

$$\pi\left(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k \middle| x_1, x_2, \ldots, x_k\right) \sim \prod_{i=1}^{k} \theta_i^{x_i} \cdot \prod_{i=1}^{k} \theta_i^{\alpha_i - 1} \sim \prod_{i=1}^{k} \theta_i^{\alpha_i + x_i - 1} \tag{4.5}$$

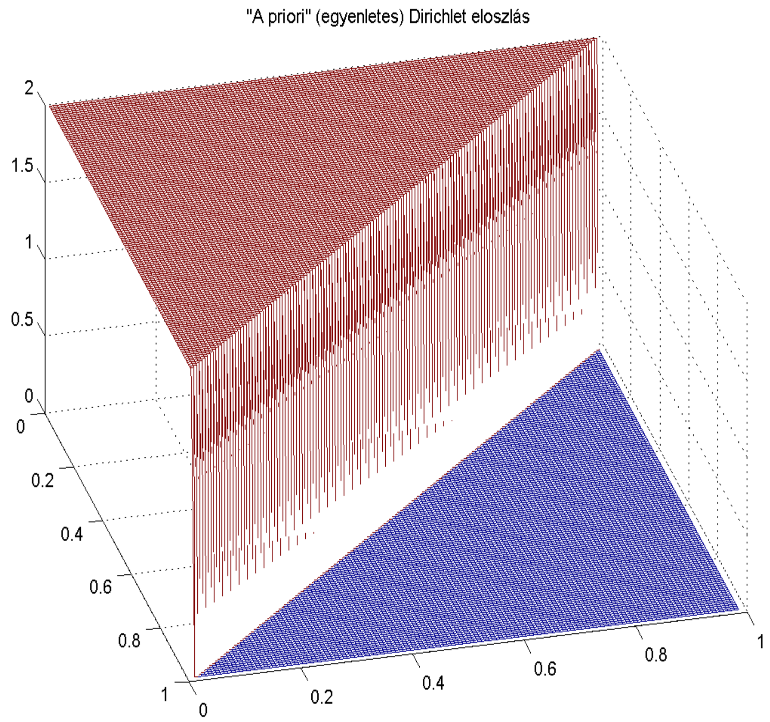
A hiányzó konstansokkal kiegészítve kapjuk egzakt módon az a posteriori eloszlást:

$$\pi\left(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k \left| x_1,x_2,\ldots,x_k\right.\right)=\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\alpha_i+x_i\right)\right)}{\prod_{i=1}^{k}\Gamma\left(\alpha_i+x_i\right)}\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{\alpha_i+x_i-1} \tag{4.6}$$

Ez ugyancsak egy Dirichlet-eloszlás. A 3. pontban is alkalmazott terminológiával azt mondhatjuk tehát, hogy a polinomiális eloszlás és a Dirichlet-eloszlás konjugált eloszlások. A megfigyelések figyelembe vételével, más szóval a frissített Dirichlet-eloszlás alapján adódnak a p_i paraméterek aktualizált értékei, amelyet az eloszlás X_i valószínűségi változójának várható értékével vagy móduszával becsülhetünk:

$$E'\left(X_{i_0}\right)=\frac{\alpha_{i_0}+x_{i_0}}{\sum_{i=1}^{k}\left(\alpha_i+x_i\right)};\ Mod'\left(X_i\right)=\frac{\alpha_i+x_i-1}{\alpha_0-k};\ Var'\left(X_i\right)=\frac{\alpha_0\left(\alpha-\alpha_i-x_i\right)}{\alpha_0^2\left(\alpha_0+1\right)};\alpha_0=\sum_{i=1}^{k}\left(\alpha_i+x_i\right)$$

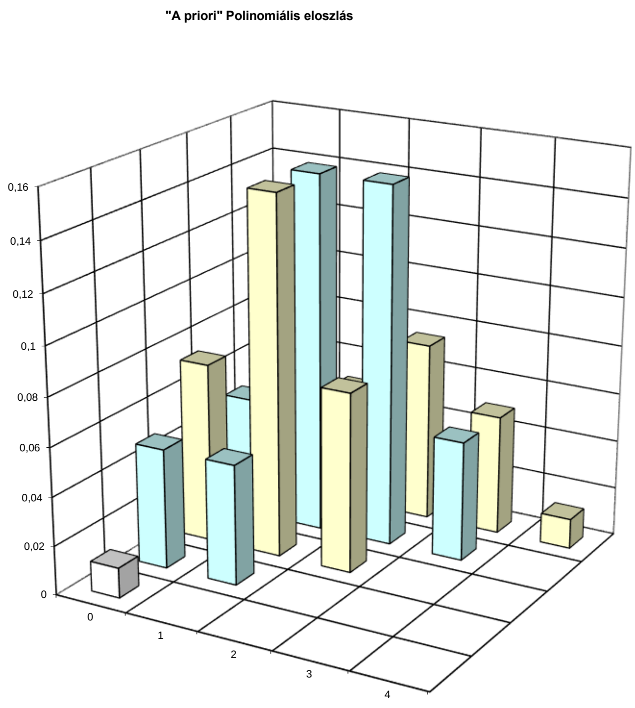
ahol az i_0 rögzített index arra utal, hogy a várható érték számlálójában nem összegzünk. A megfigyelések, felmerült adatok hatása az a posteriori becslésekre vonatkozólag pontosan ugyanúgy elemezhető, mint ahogyan azt a 3. pontban a binomiális eloszlás esetében tettük.



4. ábra Az a priori Dirichlet-eloszlás

Tekintsünk egy illusztráló példát az említett eloszlásokkal kapcsolatban. Annak érdekében, hogy szemléltetni tudjuk az érintett eloszlásokat, a $k = 3$ esetre szorítkozunk. Tegyük fel tehát, hogy bizonyos események egymástól függetlenül következhetnek be, és a bekövetkezés valószínűsége szerint három osztályba sorolhatók. Az egyes nemkívánatos események valószínűsége rendre p_1, p_2 és p_3. Tegyük fel az egyszerű áttekinthetőség érdekében, hogy mindössze n

= 4 megfigyelést végzünk, továbbá, hogy az egyes valószínűségekről semmiféle információnk nincs, így az egyenletes a priori Dirichlet-eloszlást tekintjük kiindulópontnak. Ekkor legyen $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$. Az eloszlás peremeloszlásainak várható értéke adja a p_i paraméterek kezdőértékét. Ez − összhangban az intuitív megközelítéssel − a $p_i = \frac{1}{3}$ (i = 1, 2, 3) értékeket szolgáltatja. Ezek alapján ábrázolhatjuk az a priori Dirichlet-eloszlást és a 3-dimenziós polinomiális eloszlást. Ezeket mutatja a 4. és 5. ábra.

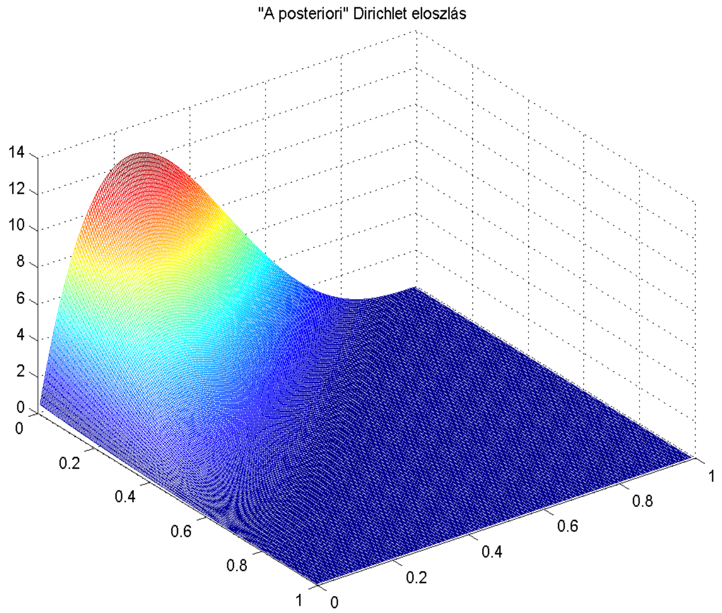


5. ábra Az a priori Dirichlet-eloszlás alapján adódó Polinomiális eloszlás

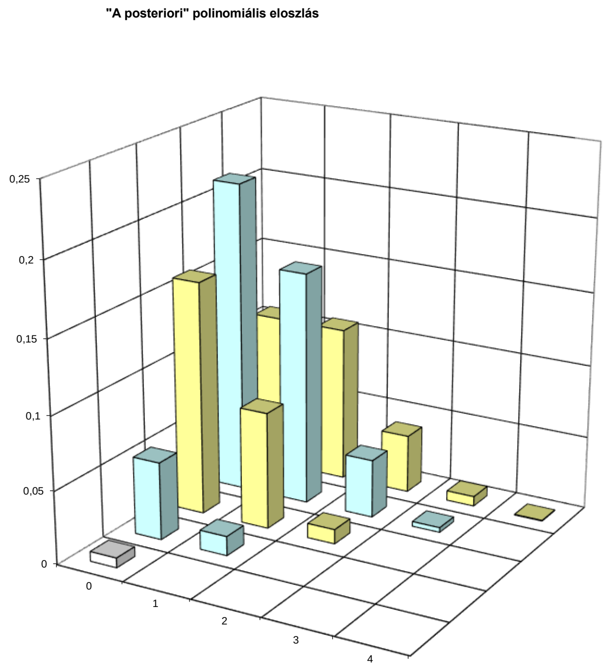
Tegyük fel, hogy a konkrét megfigyelésünk eredménye a következő: Az n = 4 megfigyelés során a p_1, p_2 és p_3 valószínűségű esemény rendre 1, 0, 3 alkalommal következik be. A Bayes-tétel alapján levezetett a posteriori eloszlás paraméterei és az egyes peremeloszlások várható értéke azonnal adódik. Növekvő indexek szerint a frissített eloszlás paramétereinek értéke 1 + 1 = 2; 1 + 0 = 1; 1 + 3 = 4, a várható értékek pedig

$$p_1' = \frac{1+1}{3+4} = \frac{2}{7};\ p_1' = \frac{1+0}{3+4} = \frac{1}{7};\ p_1' = \frac{1+3}{3+4} = \frac{4}{7}.$$

Ha ezekkel a paraméterekkel ábrázoljuk az a posteriori Dirichlet-eloszlást, valamint az aktualizált paraméterekkel adott polinomiális eloszlást, akkor a 6. ábrán látható felületet illetve a 7. ábrán látható hisztogramot kapjuk.



6. ábra Az a posteriori Dirichlet-eloszlás



7. ábra Az a posteriori Dirichlet-eloszlás alapján adódó Polinomiális eloszlás

A hisztogramokat összehasonlítva látható, hogy az eloszlás megváltozott. A kiinduló és a frissített polinomiális eloszlást numerikus adatokkal adja meg az 1. táblázat.

Polinomiális eloszlás $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$ paraméterekkel							Polinomiális eloszlás $p_1 = 2/7$, $p_2 = 1/7$, $p_3 = 4/7$ paraméterekkel					
$k_1 \backslash k_2$	0	1	2	3	4		$k_1 \backslash k_2$	0	1	2	3	4
0	0,0123	0,0494	0,0741	0,0494	0,0123		0	0,1066	0,1066	0,04	0,0067	0,0004
1	0,0494	0,1481	0,1481	0,0494			1	0,2132	0,1599	0,04	0,0033	
2	0,0741	0,1481	0,0741				2	0,1599	0,08	0,01		
3	0,0494	0,0494					3	0,0533	0,0133			
4	0,0123						4	0,0067				

1. táblázat Az a priori és a posteriori polinomiális eloszlás

Az egyszerűbb összehasonlítás érdekében tegyük példaképpen számszerűvé annak valószínűségét, hogy két nemkívánatos esemény külön-külön (melyek valószínűsége rendre p_1, p_2) legfeljebb egy alkalommal következik be. (Ezt interpretálhatjuk úgy is, hogy voltaképpen két nemkívánatos eseményről van szó, és p_3 annak az eseménynek a valószínűsége, hogy sem a p_1, sem a p_2 valószínűségű „nem kívánatos” esemény nem következik be.) Tehát kérdezzük a következőt: Mi a valószínűsége a $(k_1 \leq 1;\ k_2 \leq 1)$ eseménynek. Az a priori becslés, tehát az egyenletes Dirichlet-eloszlás alapján kapott valószínűség az eloszlás ismeretében: P = 0,0123 + 0,0494 + 0,0494 + 0,1481 = 0,2592. Ha az a posteriori becslés alapján kapott polinomiális eloszlást tekintjük, akkor pedig: P' = 0,1066 + 0,2132 + 0,1066 + 0,1599 = 0,5863. Eredményünk azt jelenti, hogy a megfigyelések figyelembevételével, a kérdéses esemény valószínűsége, ezzel a kockázat becsült értéke több, mint kétszeresére növekedett.

5. Összefoglalás

A Bayes-analízis fentiekben bemutatott alkalmazása kiválóan alkalmas a szubjektív értékítéletek és tapasztalat alapján kapott adatokból leszűrt következtetések összehangolására. A példákban konkrét diszkrét eloszlások egy alkalmazási lehetőségére koncentráltunk, azonban van lehetőség tetszőleges diszkrét és folytonos eloszlások esetén is alkalmazni a Bayes-analízist.

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] EZELL, BENNETT, WINTERFELDT, SOKOLOWSKI, COLLINS: Probabilistic Risk Analysis and Terrorism Risk. *Risk analysis,* Vol. 30, No.4, 2010.

[2] Elisabeth PATÉ-CORNELL, Seth GUIKEMA: Probabilistic Modelling of Terrorist Threats: A System Analysis Approach to Setting Priorities Among Countermeasures. *Military Operations Research.* Vol. 7, No. 4, pp. 5-20. 2002

[3] BIER, V.M., MOSLEH, A.: The subjective Bayessian approach to Probabilistic Risk Assessment. *Reliability Engineering and System Safety 23* (1988) 269-275.

[4] DENKINGER Géza: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó. Budapest. 1989. ISBN: 963 18 1552 8

[5] RÉNYI Alfréd: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó. Budapest, 1981. ISBN: 963175931 8

[6] William FELLER: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba. Műszaki Könyvkiadó. Budapest. 1978. ISBN: 963 10 2070 3

[7] JÁNOSSY Lajos: A valószínűségelmélet alapjai és néhány alkalmazása: Tankönyvkiadó. Budapest. 1965

ÁBRÁK

Az ábrákat a szerzők készítették Excel táblázatkezelő illetve a MATLAB szoftver segítségével.